

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL

DEPARTAMENTO DE CONSTRUÇÃO CIVIL

**UM ESTUDO SOBRE AS VIGAS DE SEÇÃO MISTA EM CHAPA
DE AÇO DOBRADA E EM MADEIRA SERRADA.**

Autor : Eng.º ADÃO MARQUES BATISTA

Orientador : Prof. Dr. NILSON TADEU MASCIA

Dissertação apresentada junto à
Faculdade de Engenharia Civil,
como parte dos requisitos
exigidos para a obtenção do título
de Mestre em Engenharia Civil ,
na área de concentração em
Estruturas .

*Atesto que esta é
a versão definitiva
da dissertação
Campinas, 16/02/96*

Clon Jelen



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	B32e
V.	Ex.
TOMBO BC/	27095
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	20/03/96
N.º CPD	CM.00085174-2

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

B32e

Batista, Adão Marques

Um estudo sobre as vigas de seção mista em chapa de
aço dobrada e em madeira serrada / Adão Marques
Batista.--Campinas, SP: [s.n.], 1996.

Orientador: Nilson Tadeu Mascia.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Civil.

1. Vigamento (Construções). 2. Vigas mistas.
3. Construção mista. 4. Estruturas metálicas. I. Mascia,
Nilson Tadeu. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Civil. III. Título.

À minha esposa

Sueli

Aos meus filhos

Pedro e

André

BANCA EXAMINADORA :



Prof. Dr. Carlito Calil Júnior (EESC - USP)



Prof. Dr. Aloísio Ernesto Assan (FEC - UNICAMP)



Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia (FEC - UNICAMP)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Nilson Tadeu Mascia pela orientação neste trabalho, pelo estímulo e pela amizade demonstrada .

À CAPES (Capacitação de pessoal de nível superior) pela concessão da bolsa de estudos .

À Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP pela acolhida e infra - estrutura oferecida .

Aos professores e técnicos do Laboratório do DCC (Departamento de Construção Civil) da Faculdade de Engenharia Civil da UNICAMP pelo auxílio na realização dos ensaios.

À Universidade de Mogi das Cruzes pelo apoio através do CCET (Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas) e ao PROEN /DPPG - Programa de apoio à qualificação docente - Mestrado e Doutorado - "Stricto Sensu" , pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa .

À Universidade São Francisco pelo apoio , acolhida e incentivo ao aprimoramento acadêmico recebido durante o desdobramento deste trabalho .

À empresa Cofix moldes e Escoramentos Metálicos Ltda , pelo fornecimento das peças necessárias para a elaboração dos ensaios .

Ao LaMEM (Laboratório de madeira e Estruturas de Madeiras) , da cidade de São Carlos -SP pela identificação da madeira empregada na viga mista .

Ao Prof. Rubens Shimizu da Universidade de Mogi das Cruzes pelo amplo apoio e incentivo na melhoria do meu desenvolvimento acadêmico .

Aos amigos que, direta ou indiretamente, contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho , em especial ao amigo Djalma Gomes dos Santos , pelo apoio nos momentos mais difíceis .

À minha esposa Sueli pelo auxílio, incentivo e, principalmente , pela paciência na realização desta dissertação .

LISTA DE SÍMBOLOS

θ	ângulo das fibras
δ	diâmetro do parafuso
π	energia total
λ	esbeltez
δI	variação do funcional
σ_{ij}	tensor de tensões , tensão
ε_{kl}	tensor de deformações , deformação
λ_i	multiplicador de Lagrange
ℓ_i	comprimento
ν_{ij}	coeficiente de Poisson
τ_{ij}	tensão tangencial
γ_{ij}	distorção
ℓ_{ij}	cossenos diretores
A	área
a	distância vertical entre as linhas de conectores
b	largura
C_{ijkl}, C_{mn}	tensor constitutivo (de constantes de elasticidade)
c_i	fator de forma
d	diâmetro

E_i	módulo de elasticidade
e	espaçamento
\bar{F}	força admissível
F_{cis}	força total de cisalhamento
F_i	força
f_y	tensão de escoamento, limite de proporcionalidade
f_{rup}	tensão de ruptura
f_u	resistência à tração
G_{ij}	módulo de elasticidade transversal
h	altura
I_i	momento de inércia
J_w	momento de inércia setorial
m	centro de cisalhamento
M_{cr}	momento crítico
M_i	momento fletor
N	número total de parafusos
n_w	razão modular
P_i	carga
q	fluxo de cisalhamento , carregamento fictício
R_{dv}	força resistente de cálculo ao esforço cortante
r_i	raio de giração
S	momento estático

s	subscrito que representa chapa de aço
S_{ijkl}, S_{mn}	tensor constitutivo (flexibilidade)
t	espessura
T	força de tração na ligação
tg	tangente
U	energia de deformação
v_i	linha elástica , deslocamento vertical
V	força cortante
W	trabalho
w	subscrito que representa madeira
x,y,z	sistema de coordenadas
x_i	sistema de coordenadas

RESUMO

O objetivo desse trabalho foi analisar o comportamento estrutural de vigas mistas, constituídas por duas partes , uma parte em madeira serrada e a outra em chapa de aço dobrada , formando uma seção em duplo “c” solidarizadas por parafusos de aço. Essas vigas podem ser utilizadas em componentes estruturais de coberturas , escoramentos de pontes e de edifícios.

A formulação teórica foi baseada na ortotropia elástica linear e a análise da rigidez da viga de seção mista foi feita pelo método da seção transformada, na qual a rigidez de um material é transformado numa rigidez equivalente a do outro .

Essa rigidez foi determinada usando uma viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada no meio do vão e medindo-se os deslocamentos .

Analizamos, também , as tensões normais e as tangenciais na viga composta na região onde se encontram os parafusos .

Os resultados obtidos indicaram que o aço contribui com a maior parte da rigidez total, mas a madeira é importante, pois evita a torção dos elementos . Além disso, a correta disposição e o dimensionamento das ligações são fundamentais para um adequado desempenho dessas vigas compostas .

ABSTRACT

The aim of this work was to analyse the structural behaviour of the sandwich beams, which are constituted of two parts , one part in sawed timber and the other in cold-formed steel , resulting in a double “c” section . These parts were fastened with steel connectors . These beams can be applied as the structural components of a roof and a scaffolding of bridge and building construction .

The theoretical formulation was based on orthotropic linear elasticity and the analysis of the stiffness of the sandwich beams was performed by the method of the transformed section in which the stiffness of a material is transformed into the equivalent stiffness of the other material.

This stiffness was be determined experimentally by using a simple supported beam with concentrated load applied to the middle span and by measuring the displacements .

The normal strain and the shear strain in sandwich beams on the position connectors was analysed too .

The obtained results indicated that the steel components contribute to the main part of the total stiffness, but the wood components are important to avoid the torsion of the steel parts. Furthermore the correct disposition and dimension of the connectors are fundamental for a suitable performace of the sandwich beams .

SUMÁRIO

1	Introdução e objetivos da pesquisa.....	1
2	Relações tensão - deformação.....	7
2.1	Materiais ortotrópicos(madeira).....	11
2.1.1	Determinação das constantes elásticas da madeira	11
2.2	Materiais isotrópicos (aço).....	17
2.3	Transformação de coordenadas	18
2.4	Vigas mistas.....	23
3	Parâmetros da rigidez	25
3.1	Método da seção transformada	25
3.1.1	Exemplo numérico.....	28
3.2	Parâmetros de elasticidade	31
4	Determinação da linha elástica.....	38
4.1	Energia de deformação.....	39
4.2	O problema variacional da viga transformada.....	43
5.	Determinação do fator de forma	48
5.1	Determinação do fator de forma para a chapa metálica dobrada.....	50
5.2	Determinação do fator de forma para a madeira	52
5.3	Determinação do fator de forma para a viga mista (transformada).....	54

5.4	Cálculo do fator de forma de algumas vigas utilizadas pelos fabricantes	56
6	Análise da chapa de aço	58
6.1	Flambagem local	59
6.2	Flambagem lateral	62
7	Estudo das ligações.....	66
7.1	Generalidades	66
7.2	Critérios de dimensionamento.....	70
7.3	Considerações sobre parafusos	75
7.4	Dimensionamento do parafuso.....	81
7.4.1	Fluxo de cisalhamento	81
7.4.2	Centro de cisalhamento em seções delgadas.....	88
8.	Experimentação realizada e resultados obtidos.....	95
8.1	Chapa de aço.....	95
8.2	Madeira serrada	99
8.3	Ensaio de flexão na viga mista	103
8.3.1	Modelo com 3 parafusos de diâmetro 12,7 mm alinhados na alma	105
8.4	Proposta de alteração dos parafusos	113
8.4.1	Dimensionamento dos parafusos através do fluxo de cisalhamento e os parafusos alinhados na alma	113
8.4.2	Dimensionamento dos parafusos através do centro de cisalhamento com parafusos alinhados próximos às mesas..	117
8.5	Ensaio do modelo com 5 (cinco) parafusos de diâmetro 12,7 mm alinhados na alma	119

8.6	Ensaio do modelo com 23(vinte e três) parafusos de diâmetro 6mm alinhados na alma	123
8.7	Ensaio do modelo com 14 (quatorze) parafusos de diâmetro 6 mm alinhados próximos às mesas.....	128
8.8	Ensaio do modelo com 13 (treze) parafusos de diâmetro 6 mm alinhados próximos às mesas em forma de zig - zag...	132
8.9	Comentários a respeito dos resultados obtidos.....	137
9	Verificação das tensões	142
10	Conclusões.....	148
11	Referências Bibliográficas.....	153
12	Bibliografia	159
13	Anexos.....	167

1. INTRODUÇÃO E OBJETIVOS DA PESQUISA

A engenharia, de um modo geral , tem procurado conjugar, adequadamente , aspectos de natureza econômica com aspectos de segurança e rapidez na execução das construções de edifícios, de pontes , etc. .

Um destes aspectos, de grande importância , refere - se aos cimbramentos das construções. Atualmente as empresas que atuam nesta área utilizam em estruturas de cimbramentos vigas de seção composta, mistas em aço e madeira .

Estas vigas de seção transversal são de uso corrente, principalmente devido ao seu baixo peso , preço competitivo e pela praticidade na execução e na montagem dos arranjos estruturais inerentes às obras de cimbramentos .

Devemos , também , observar , as facilidades do uso da madeira no canteiro de obra , principalmente na fixação , no travamento e no alinhamento das formas para concreto , e de sua reposição ou substituição , quando da diminuição ou perda de suas propriedades mecânicas.

A aplicação do aço como elemento principal está relacionada, principalmente, com a rigidez transversal da viga de seção composta . Além disso , há a necessidade de industrialização e padronização das peças ou vigas de cimbramentos .

A composição ou solidarização parcial das vigas é feita através de parafusos. Na fig. 1 apresentamos a seção transversal de uma viga formada por duas chapas de aço dobradas , tipo c , dispostas lado a lado, e madeira serrada na parte central . Na fig. 2 pode ser visto aspecto geral do vigamento de formas constituído por vigas principais e secundárias .

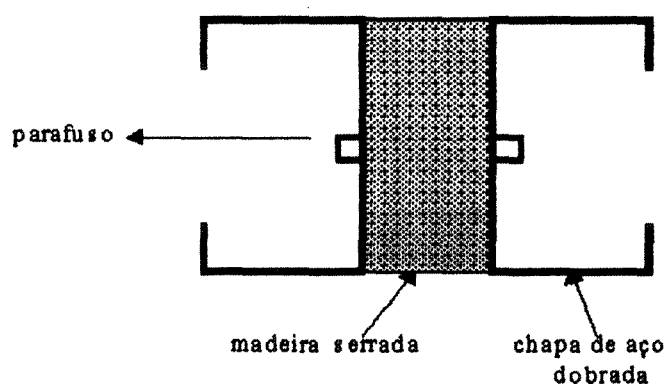
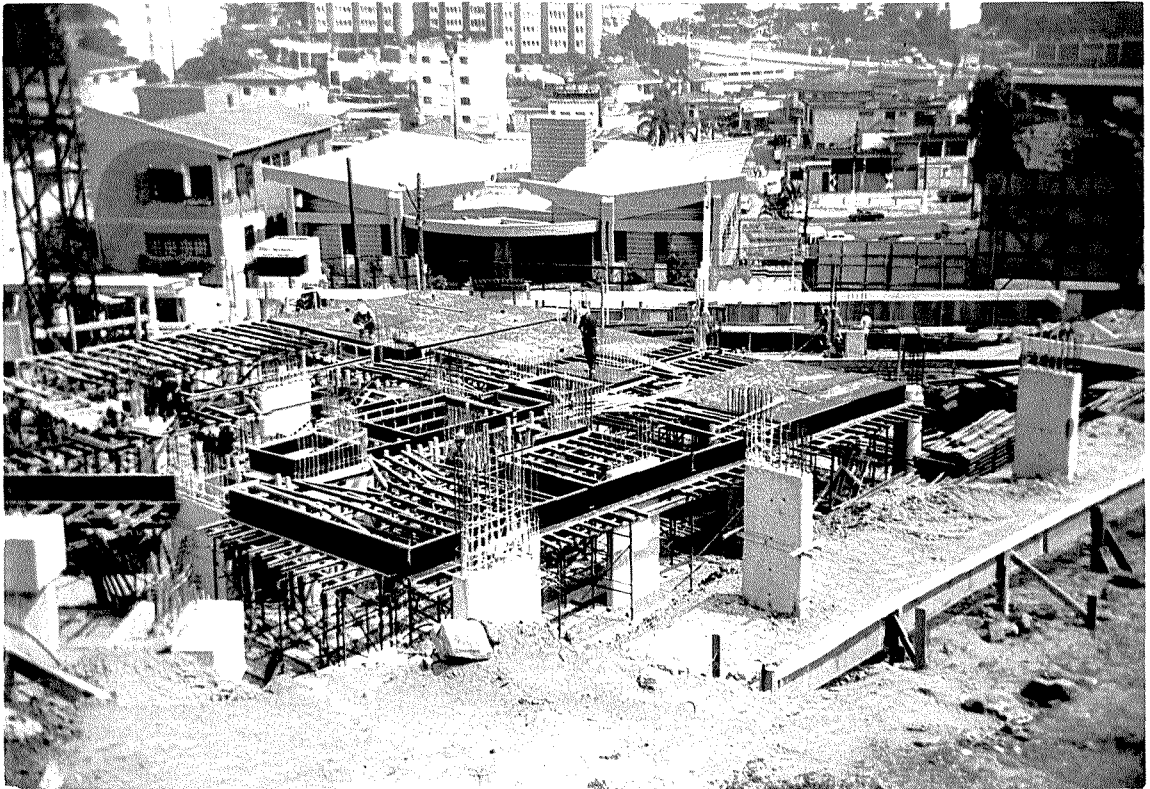


Fig. 1 Seção transversal composta de duas chapas , tipo c , dispostas lado a lado e uma madeira serrada, na parte central

Fonte PFEIL ^[32] página 229 .



**Figura 2 Fotos de um vigamento de formas constituído por
vigas principais e secundárias**

A composição destas vigas, e principalmente a disposição dos elementos de ligação, são executadas de maneira empírica pelas empresas do ramo de cimbramentos . Devido a alguns acidentes que ocorreram recentemente em algumas obras, chegou - se à necessidade de estudar o comportamento físico e mecânico da chapa de aço e da chapa de madeira , principalmente das ligações e o comportamento estrutural do conjunto .

Na fig. 3 apresentamos fotos de um acidente recente e provocado pela ruína das vigas principais da estrutura de cimbramentos do Edifício Embrapa em São Carlos- SP , ocorrido em 22/09/94 .

Neste contexto , inserimos o nosso trabalho, sendo que a sua primeira etapa se norteia pelo estudo das propriedades de elasticidade e de resistência dos elementos participantes da viga , onde temos um material ortotrópico , isto é , cujas propriedades dependem da direção arbitrada, ou seja , a madeira , e outro material , isotrópico, que tem suas propriedades independentes das direções consideradas .

Outra consideração que podemos fazer em relação à seção transversal , é que nos cálculos podemos trabalhar com uma seção homogeneizada , transformando os materiais de diferentes categorias (propriedades de elasticidade e de resistência) , numa seção composta de um único material , mas equivalente à seção real .

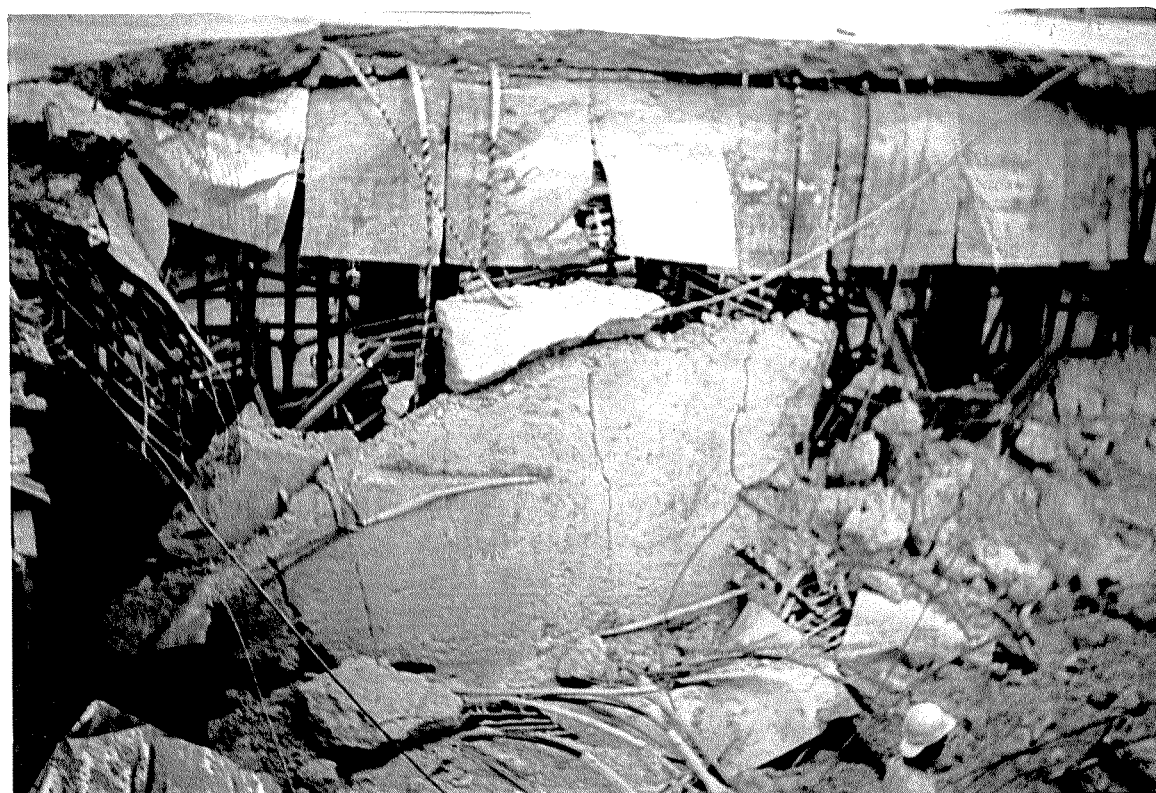


Figura 3 Foto de acidente por ruína das vigas principais do cimbramento .

POPOV^[33] e BLACK^[8] , trabalham com a chamada seção transformada , para solucionar este problema , que em linhas gerais, transforma a rigidez de uma das partes, através da relação entre os módulos de elasticidades dos materiais da seção, numa rigidez equivalente . Deste modo, a seção a ser estudada torna - se equivalente a uma seção formada por apenas um material , mas com a mesma rigidez .

A verificação das tensões , das deformações e dos deslocamentos , no estudo da flexão destas vigas, seguem os conceitos pertinentes à energia de deformação .

Numa etapa posterior foi realizada a análise experimental dessas vigas , com ensaios de flexão em protótipos similares aos utilizados pelas empresas do ramo , e , também, ensaios de compressão e tração para a caracterização dos materiais presentes na viga composta .

Com base nesta pesquisa , apresentamos ao final deste trabalho sugestões no dimensionamento para que o comportamento estrutural destas vigas possam vir a ser otimizados nos aspectos de segurança, disposição dos elementos de ligação e de modo geral, no conhecimento e divulgação deste tipo de estrutura.

2. RELAÇÕES TENSÃO DEFORMAÇÃO

A lei de Hooke consiste , em linhas gerais , numa relação linear entre tensão e deformação.

CHEN ^[12] apresenta esta lei através da seguinte expressão na forma tensorial :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \dots\dots\dots (01)$$

Onde : σ_{ij} = tensor das tensões ;

ε_{kl} = tensor das deformações ;

C_{ijkl} = tensor dos parâmetros de elasticidade .

Verificamos , então , que existem 81 (oitenta e um) elementos do tensor C_{ijkl} a serem determinados .

Os tensores σ_{ij} e ε_{kl} são simétricos. Aplicando-se estas condições na expressão (1) , verificamos que o número de elementos independentes se reduz a 36 (trinta e seis) . Através do teorema de Maxwell, observamos a simetria de C_{ijkl} , e chegamos à condição de 21 (vinte e um) elementos presentes no tensor C_{ijkl} , sendo apenas 18 independentes [referência → MASCIA^[27] (1991)].

Colocando - se , então , a expressão (01) na forma matricial temos :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ & & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ & & & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ & \text{SIM.} & & & C_{2323} & C_{2331} \\ & & & & & C_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} \dots (02)$$

Da mesma maneira , podemos escrever a relação inversa, ou seja :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \dots \dots \dots (03)$$

Que na forma matricial pode ser representado por :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ & & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ & & & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ & \text{SIM.} & & & S_{2323} & S_{2331} \\ & & & & & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (04)$$

Sendo S_{ijkl} chamado de tensor de flexibilidade (Complância) . Podemos observar que vale a seguinte relação :

$$C = S^{-1} \dots \dots \dots (05)$$

Com o uso da notação de engenharia podemos substituir $2\varepsilon_{12}$, $2\varepsilon_{23}$, $2\varepsilon_{31}$ respectivamente por γ_{12} , γ_{23} , γ_{31} , e σ_{12} por τ_{12} , σ_{23} por τ_{23} e σ_{31} por τ_{31} temos :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ & & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ & & & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ \text{SIM.} & & & & S_{2323} & S_{2331} \\ & & & & & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} \dots\dots (06)$$

LEKHNITSKII ^[21] coloca a forma tensorial reduzida para as equações tensoriais e matriciais constitutivas de tal maneira que os índices estejam relacionados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= S_{ijkl} && \text{se } m, n = 1, 2, 3 \\ S_{mn} &= 2 S_{ijkl} && \text{se } m \text{ ou } n = 4, 5, 6 \\ S_{mn} &= 4 S_{ijkl} && \text{se } m \text{ ou } n = 4, 5, 6 \\ C_{mn} &= C_{ijkl} && \text{para quaisquer índices} \end{aligned}$$

Resultando a escrita do tensor das constantes de elasticidade em :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{SIM.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (07)$$

E a relação inversa também pode ser escrita como sendo :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{SIM.} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (08)$$

2.1 MATERIAIS ORTOTRÓPICOS (MADEIRA)

Os materiais ortotrópicos possuem 3 planos de simetria elástica perpendiculares entre si , cujas propriedades de elasticidade são invariantes . Com o uso da simetria elástica, onde se aplicam as transformações tensoriais em busca dos eixos principais de elasticidade , chegamos a 12 (doze) elementos , dos quais 9 são independentes.

Assim sendo , necessitamos determinar os valores destas constantes elásticas para podermos trabalhar com a madeira, que é uma das componentes da viga mista .

2.1.1 DETERMINAÇÃO DAS CONSTANTES ELÁSTICAS DA MADEIRA

O estudo e a determinação das constantes de elasticidade da madeira , a título de ilustração , pode ser feito se considerarmos um pequeno bloco de madeira, num sistema cartesiano de referência , com a carga , a princípio, numa direção X_1 coincidente com o eixo principal de elasticidade da madeira , no caso o eixo L , conforme vemos na fig. 4 .

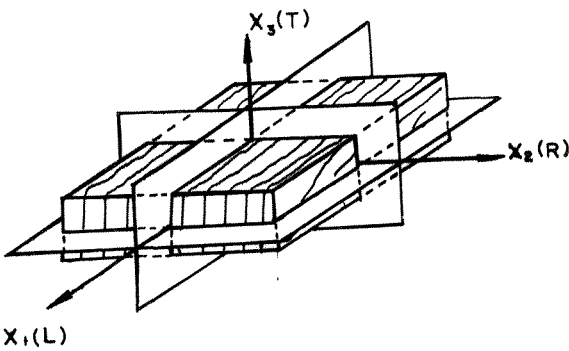


Figura 4 Modelo ortotrópico

Fonte : BODIG e JAYNE ^[9] página 92

Observamos que ocorrerá deformações normais γ_{11} ao longo do eixo X_1 , provocando como consequência nas direções X_2 e X_3 deformações normais γ_{22} e γ_{33} , como mostra a fig. 5.

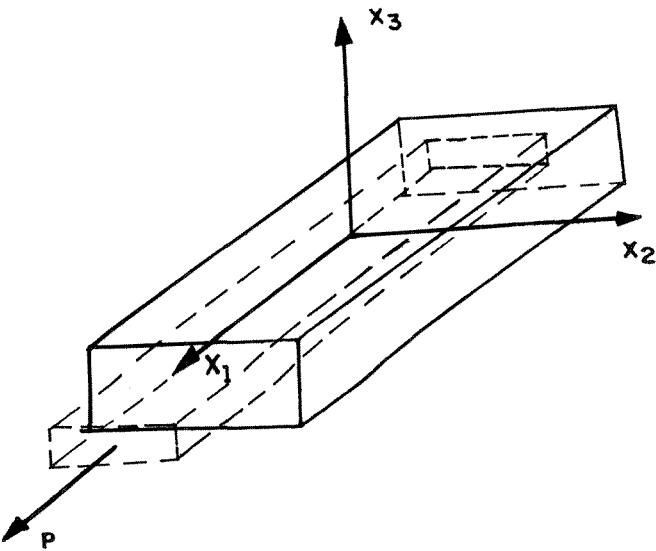


Figura 5 - Comportamento do material sob tração

Através da lei constitutiva do material temos :

$$\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} , \varepsilon_{22} = -S_{21}\sigma_{11} , \varepsilon_{33} = -S_{31}\sigma_{11} \dots\dots\dots (09)$$

Tecendo as mesmas considerações para as respectivas direções X_2 e X_3 , obteremos os seguintes resultados :

$$\varepsilon_{11} = -S_{12}\sigma_{22} , \varepsilon_{22} = S_{22}\sigma_{22} , \varepsilon_{33} = -S_{32}\sigma_{22} \dots\dots\dots (10)$$

$$\varepsilon_{11} = -S_{13}\sigma_{33} , \varepsilon_{22} = -S_{23}\sigma_{33} , \varepsilon_{33} = S_{33}\sigma_{33} \dots\dots\dots (11)$$

Somando - se as contribuições para cada direção, através da ação das três tensões aplicadas simultaneamente nas respectivas direções X_1 , X_2 , X_3 produzidas pelas equações (9), (10) e (11) obteremos a deformação total em cada eixo :

$$\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} - S_{12}\sigma_{22} - S_{13}\sigma_{33} \dots\dots\dots (12)$$

$$\varepsilon_{22} = -S_{21}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22} - S_{23}\sigma_{33} \dots\dots\dots (13)$$

$$\varepsilon_{33} = -S_{31}\sigma_{11} - S_{32}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33} \dots\dots\dots (14)$$

Se aplicarmos agora uma tensão tangencial no plano X_2 - X_3 , ocorrerão deformações nos eixos ortogonais X_2 e X_3 , conforme mostra a fig. 6 .

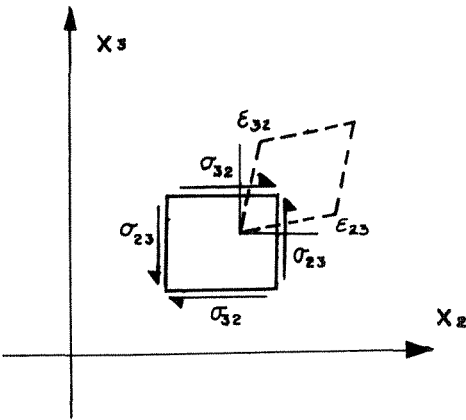


Figura 6 - Cisalhamento no plano $X_2 - X_3$.

Fonte BODIG e JAYNE ^[9] página 93

Por outro lado, o gráfico da tensão de cisalhamento x distorção ao cisalhamento no plano $X_2 - X_3$ possui a seguinte característica :

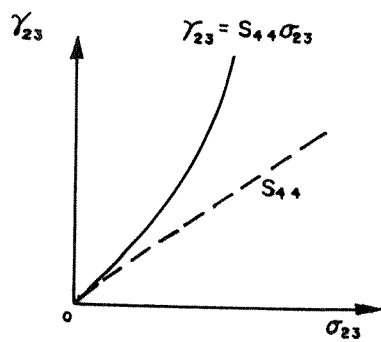


Figura 7 Tensão x Deformação no plano 2 - 3

Fonte BODIG e JAYNE ^[9] página 93

O gráfico apresentado na fig. 7 permite escrever a seguinte expressão :

$$\gamma_{23} = S_{55}\tau_{23} \dots\dots\dots (15)$$

Analogamente para os outros planos obteremos :

$$\gamma_{13} = S_{66}\tau_{13} \dots\dots\dots (16)$$

$$\gamma_{12} = S_{44}\tau_{12} \dots\dots\dots (17)$$

Desta forma , obteremos a relação tensão deformação para a madeira, como mostra a expressão 18 .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

Os elementos E_1 , E_2 , E_3 , são chamados módulos de elasticidade longitudinal, os G_{12} , G_{23} , G_{31} os módulos de deformação transversal e os ν_{12} , ν_{23} , ν_{13} , os coeficientes de Poisson ^A.

Uma característica que ressalta da ortotropia elástica é a constatação de que devem ser determinados 6 (seis) módulos de elasticidade, além de mais 3 (três) relações independentes, envolvendo os coeficientes de Poisson.

^A Em homenagem ao pesquisador francês S. D. Poisson.

2.2 MATERIAIS ISOTRÓPICOS (AÇO) .

Os materiais isotrópicos, como o aço, apresentam simetria elástica em qualquer direção . Desse modo, o número de elementos que estão presentes no tensor constitutivo se reduzem a apenas três; E ,G , ν , sendo apenas 2 (dois) independentes .

A lei de Hooke pode, então, ser escrita como :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

2.3 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Nos itens 2.1 e 2.2 estabelecemos que existia coincidência entre os eixos coordenados e a direção das fibras. Nem sempre isto é possível .

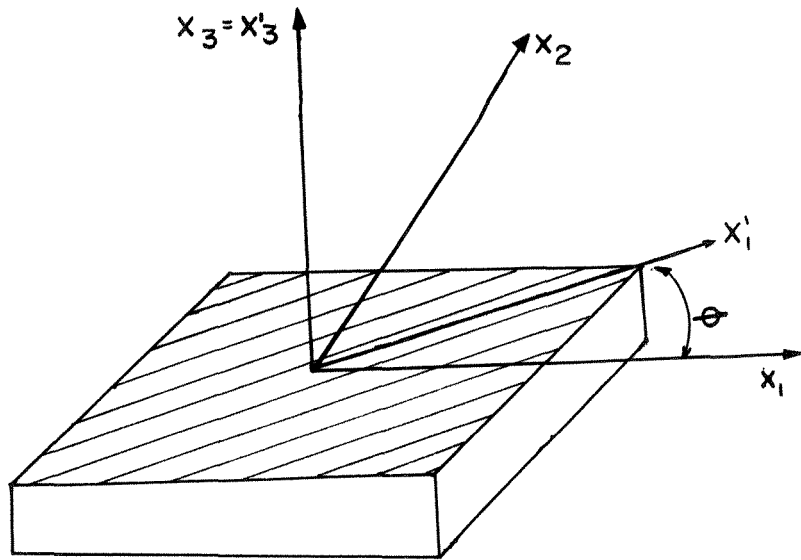


Figura 8 Sistema de coordenadas não coincidentes.

Fonte MALLICK ^[25] página 97

Adotando eixos coordenados X'_1 , X'_2 , e X'_3 , não coincidentes com os eixos principais do material (fig.8), devemos fazer uma transformação de coordenadas, de um sistema para outro, e podemos verificar através da equação (20) a lei de transformação .

$$S'_{ijkl} = l_{im} l_{jn} l_{ko} l_{lp} S_{mnop} \dots\dots\dots (20)$$

Onde :

S'_{ijk1} são os coeficientes do tensor de flexibilidade no novo sistema de coordenadas ;
 $l_{im} , l_{jn} , l_{ko} , l_{lp}$, são cosenos diretores que na forma tensorial ;
 S_{ijk1} são os coeficientes do tensor de flexibilidade no antigo sistema de coordenadas .

Na tabela 1 , encontra - se a transformação de coordenadas, de um sistema antigo para um novo sistema requerido, utilizando - se o conceito dos cosenos diretores .

novas Coordenadas	Antigas Coordenadas			
	Eixos	X_1	X_2	X_3
	$X' 1$	l_{11}	l_{12}	l_{13}
	$X' 2$	l_{21}	l_{22}	l_{23}
	$X' 3$	l_{31}	l_{32}	l_{33}

(21)

Tabela 1 Transformação de coordenadas
Fonte CHEN ^[12]

Considera - se um exemplo em que o eixo X'_3 é coincidente com o eixo X_3 , e fazendo uma rotação no plano $X_1 X_2$, de acordo com a fig. 9 .

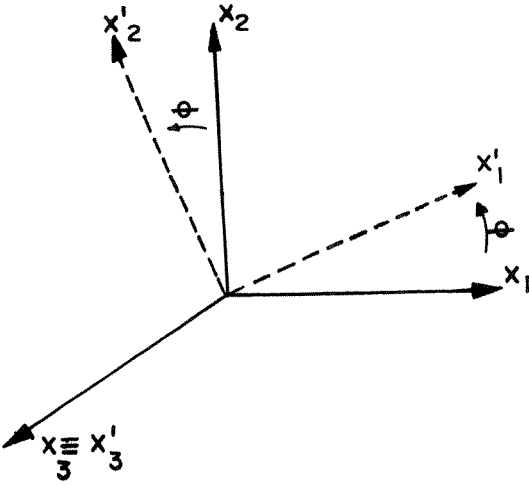


Figura 9 Sistema X'1, e X'2 rodando em torno do eixo X3 de ângulo θ

Fonte MASCIA^[27]

Os cosenos diretores l_{ij} em uma rotação de eixos coordenados, em torno do eixo X_3 são definidos por :

$$l_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

Desta forma , o tensor de flexibilidade no novo sistema é dado por :

$$S'_{ijkl} = \begin{bmatrix} S'_{1111} & S'_{1122} & S'_{1133} & 0 & 0 & S'_{1131} \\ & S'_{2222} & S'_{2233} & 0 & 0 & S'_{2231} \\ & & S'_{3333} & 0 & 0 & S'_{3331} \\ & & & S'_{1212} & S'_{1223} & 0 \\ & \text{SIM.} & & & S'_{2323} & S'_{2331} \\ & & & & & S'_{3131} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

De maneira análoga , podemos também fazer uma rotação em torno de X_1 e X_2 ,
resultando respectivamente nos seguintes tensores :

$$S'_{ijkl} = \begin{bmatrix} S'_{1111} & S'_{1122} & S'_{1133} & S'_{1112} & 0 & 0 \\ & S'_{2222} & S'_{2233} & S'_{2212} & 0 & 0 \\ & & S'_{3333} & S'_{3312} & 0 & 0 \\ & & & S'_{1212} & 0 & 0 \\ & \text{SIM.} & & & S'_{2323} & S'_{2331} \\ & & & & & S'_{3131} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

$$S'_{ijkl} = \begin{bmatrix} S'_{1111} & S'_{1122} & S'_{1133} & 0 & S'_{1123} & 0 \\ & S'_{2222} & S'_{2233} & 0 & S'_{2223} & 0 \\ & & S'_{3333} & 0 & S'_{3323} & 0 \\ & & & S'_{1212} & S'_{1223} & S'_{1231} \\ & \text{SIM.} & & & S'_{2323} & 0 \\ & & & & & S'_{3131} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

Ressaltamos que, quando os eixos coordenados não coincidem com os eixos das fibras do material, é necessária uma transformação de coordenadas para trabalharmos com valores reais do tensor S_{ijk1} . Entretanto, verificamos que, se não houver coincidência entre os eixos coordenados da estrutura e os eixos principais do material, após a transformação, aparecem alguns valores não nulos no tensor no lugar daqueles anteriormente nulos.

2.4 VIGAS MISTAS

O estudo de vigas recai, basicamente, na análise de uma estrutura plana onde é considerada a hipótese de Bernoulli-Navier e as deformações são proporcionais às tensões .

A viga mista é composta de dois materiais diferentes , e seu estudo está norteado na transformação das rigidezes individuais em rigidezes equivalentes. Neste sentido , devemos atentar para as leis constitutivas destes materiais para estabelecermos o estudo de forma correta .

A partir dessas considerações , a relação deformação com a tensão , para materiais ortotrópicos será escrita na seguinte forma :

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

E para materiais isotrópicos , a forma matricial seria :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

Os materiais assim associados serão tratados de tal forma que se estabelecerá uma única forma matricial para a relação tensão - deformação, que iremos estudar no item 3.2: parâmetros elásticos , quando serão determinados os valores das componentes da matriz .

3. PARÂMETROS DA RIGIDEZ

A rigidez da seção em chapa de aço dobrada e madeira serrada é a soma das rigidezes das seções de cada material empregado na seção transversal .

Entretanto , também devemos considerar as propriedades de elasticidade e de resistência de cada material , requerendo tratamentos diferenciados para os elementos na mesma seção transversal . Para solucionar este problema tem - se , com frequência , adotado o chamado método da seção transformada .

Avaliando situações de seções compostas por materiais diferentes , POPOV^[33] , entre outros , estabeleceu uma seção equivalente à real , através do método citado, antes composta de materiais heterogêneos.

3. 1 MÉTODO DA SEÇÃO TRANSFORMADA

No método da seção transformada a seção real é convertida , para efeito de cálculo , em outra equivalente, composta de apenas um material , imaginado-a homogênea , mas tendo a mesma rigidez entre as seções consideradas, a real e a transformada .

Para que a seção transformada seja equivalente à seção real, é preciso que em ambas as seções :

- O eixo neutro esteja na mesma posição da situação real ;
- A capacidade de resistir ao momento fletor de serviço seja a mesma .

Devemos escolher um material que será utilizado como referência . A seção transformada terá o módulo de elasticidade deste material .

PARKER ^[31] , trabalhando com aço (s) e madeira (w) , estabelece uma razão entre eles (n_w). O parâmetro utilizado , a relação entre os módulos de elasticidade (E), é chamado de razão modular . Se a base de comparação for o aço na seção a ser transformada , a relação vale:

$$n_w = \frac{E_w}{E_s} \dots\dots\dots (28)$$

Além disso , JOHN e CHILVER ^[16], avaliando a rigidez de peças conjugadas , propõem a seguinte consideração :

$$EI = E_s I_s + E_w I_w \dots\dots\dots (29)$$

Através da igualdade da equação (28), sabemos que :

$$E_w = n_w E_s \dots\dots\dots (30)$$

A seção antes composta por aço e madeira , passa a ser considerada uma seção homogênea , composta somente por aço, e de módulo de elasticidade E_s .

Através desta consideração , e da expressão (30) , inserida em (29) , temos :

$$E_s I = E_s I_s + n_w E_s I_w \dots\dots\dots (31)$$

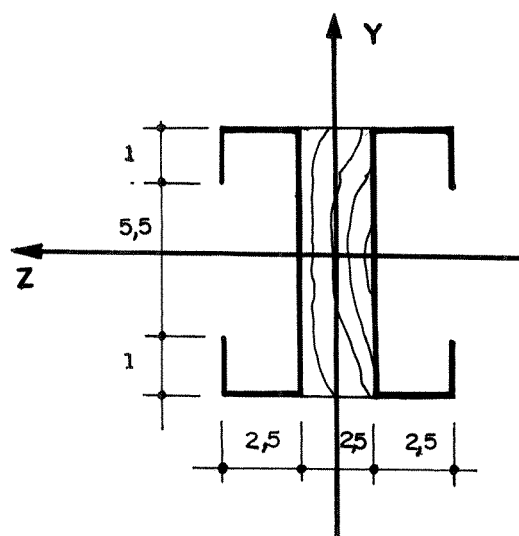
Dividindo - se a expressão (31) por E_s , o momento de inércia pode ser escrito como sendo :

$$I = I_s + n_w I_w \dots\dots\dots (32)$$

Da mesma maneira , CARRASCO ^[10] confirma esta consideração atribuindo resultados satisfatórios com a homogeneização da seção transversal de vigas de madeira laminada colada , através da análise experimental por diversos pesquisadores .

3.1.1 EXEMPLO NUMÉRICO

Utilizando - se o método da seção transformada, com as condições estabelecidas anteriormente quanto à posição da linha neutra e a capacidade de resistência ao momento fletor, calculamos a razão modular para a seção transversal da fig. 10 , que constitui - se no nosso protótipo .



Obs. espessura da chapa
de aço 2,65 mm

Figura 10 Seção transversal da Viga Mista

Os módulos de elasticidade longitudinais , em questão, são os seguintes:

$$E_s = 210.000 \text{ Mpa}$$

$$E_w = 10.500 \text{ Mpa} .$$

A razão modular dos componentes estabelecida na equação (28) , é determinada como:

$$n_w = \frac{10.500}{210.000} = 0,05$$

A transformação da seção transversal do material escolhido se dá através da área , ou seja , a madeira deverá ser transformada em área equivalente a de aço . Se neste caso a referência for o eixo z , e mantivermos a altura da peça , ou seja , alteraremos somente a base de madeira (b_w), para o equivalente em aço, temos :

$$b_w = 2,50 \times 0,05 = 0,125 \text{ cm}$$

Verificamos que a base de madeira anteriormente maior, agora passa por uma transformação para o equivalente em aço , reduzindo-se para um valor muito menor.

A fig. 11 nos mostra a seção transversal equivalente , após a aplicação do método da seção transformada .

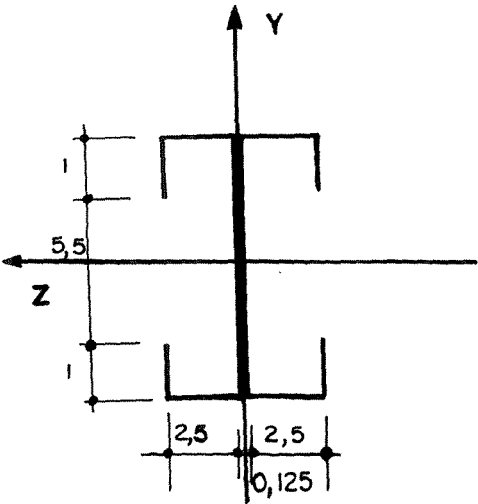


Figura 11 Seção transformada tendo como base o aço

3.2 PARÂMETROS DE ELASTICIDADE

Como apresentado na figura 1, ilustramos uma viga de seção transversal com particularidades de ortotropia e isotropia . Sabemos que a rigidez total do sistema é composta pelo somatório da contribuição de cada elemento na composição, como menciona a equação (29) .

BODIG^[9], analisando o compensado em madeira, submete uma amostra a uma carga uniaxial e menciona que os elementos dessa composição ao se deslocarem numa determinada direção, por exemplo em relação ao eixo X_1 , deverão ter o mesmo comportamento para o deslocamento horizontal e , desta forma , determina o módulo de elasticidade longitudinal do compensado. Assim , podemos atribuir o mesmo procedimento para determinar o módulo de elasticidade da viga mista .

Considerando uma carga P no modelo da fig. 12 , ela será equilibrada pelo somatório da carga absorvida pela madeira mais aquela correspondente ao aço , e tem o equilíbrio satisfeito dado pela seguinte expressão :

$$P = P_w + P_s..... (33)$$

As cargas relativas à madeira e ao aço serão respectivamente :

$P_w = \sigma_w \cdot A_w \dots\dots\dots (34)$

$P_s = \sigma_s \cdot A_s \dots\dots\dots (35)$

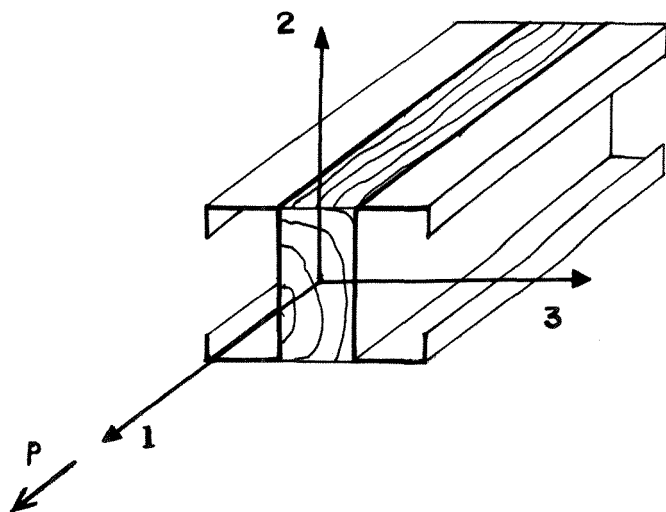


Figura 12 Vista tridimensional da viga mista com aplicação de carga uniaxial

A lei constitutiva que relaciona a tensão com a deformação pode ser escrita como sendo da seguinte maneira para os materiais aço e madeira respectivamente :

$\sigma_w = E_w \cdot \epsilon_w \dots\dots\dots (36)$

$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \dots\dots\dots (37)$

Acrescentando - se as expressões (34), (35), (36), (37) em (33), obtemos que :

$$E \varepsilon A = E_w \varepsilon_w A_w + E_s \varepsilon_s A_s \dots\dots\dots (38)$$

Devido ao fato que os deslocamentos horizontais deverão ser iguais ,chegamos a conclusão que $\varepsilon = \varepsilon_w = \varepsilon_s$.

Esta equação é similar àquela encontrada por NEWMARK, SIESS e VIEST ^[29], para vigas compostas.

A área da total seção transversal (A) , através do método da seção transformada pode ser escrita como sendo :

$$A = A_s + \frac{E_w}{E_s} A_w \dots\dots\dots (39)$$

Observamos que a segunda parcela da expressão (39), corresponde exatamente a área da madeira transformada em área de aço .

Com a expressão (30) e (39) inserida em (38) , encontramos o módulo de elasticidade da seção transformada , que será o mesmo do aço , ou seja o material tomado como base dos cálculos para a seção transformada :

$$E = \frac{E_w E_s A_w + E_s^2 A_s}{E_w A_w + E_s A_s} \dots\dots\dots (40)$$

O coeficiente de Poisson pode ser escrito através da seguinte expressão :

$$\nu_{12} = \nu_{w12} n_w \frac{A_w}{A} + \nu_{s12} \frac{A_s}{A} \dots\dots\dots (41)$$

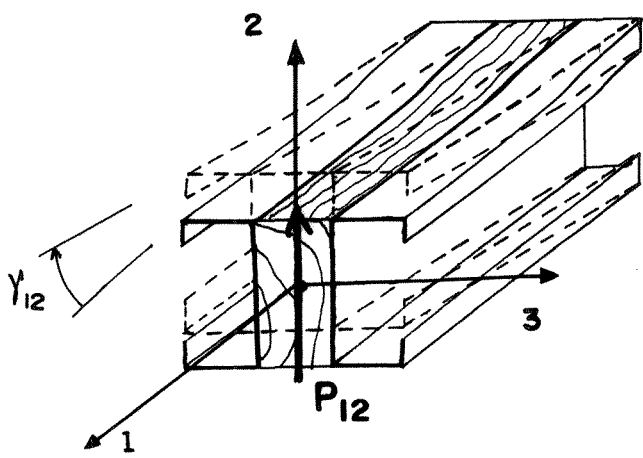


Fig. 13 Deformação por cisalhamento na viga de seção mista

Para uma carga de cisalhamento P_{12} no plano 1-2 ,conforme mostra a fig. 13 , resulta em uma distorção devida a este esforço , sendo que o equilíbrio se faz pela seguinte igualdade :

$$P_{12} = P_{w12} + P_{s12} \dots\dots\dots (42)$$

Também podemos concluir que a distorção total é obtida considerando-se a contribuição da madeira e do aço da seguinte maneira :

$$\gamma_{12} = \gamma_{w12} + \gamma_{s12} \dots\dots\dots (43)$$

E ainda :

$$P_{12} = \tau_{12} . A \dots\dots\dots (44)$$

$$P_{w12} = \tau_{w12} . A_w \dots\dots\dots (45)$$

$$P_{s12} = \tau_{s12} . A_s \dots\dots\dots (46)$$

$$\tau_{12} = G_{12} \gamma_{12} \dots\dots\dots (47)$$

$$\tau_{w12} = G_{w12} \gamma_{w12} \dots\dots\dots (48)$$

$$\tau_{s12} = G_{s12} \gamma_{s12} \dots\dots\dots (49)$$

Substituindo-se as equações (44) , (45) , (46) , (47) , (48) e (49) em (42) , temos:

$$G_{12}\gamma_{12}A = G_{w12}\gamma_{w12}A_w + G_{s12}\gamma_{s12}A_s \dots\dots\dots (50)$$

Mas sabemos que as distorções deverão ser iguais, pois devem trabalhar em conjunto , ou seja:

$$\gamma_{12} = \gamma_{w12} = \gamma_{s12} \dots\dots\dots (51)$$

Assim , rearranjando - se a equação (50) , considerando a informação da expressão (51), encontramos:

$$G_{12} = \frac{G_{w12}A_wE_w}{E_sA} + \frac{G_{s12}A_s}{A} \dots\dots\dots (52)$$

Agrupando - se as equações (32) e (40) , obtemos a rigidez (EI) do conjunto como sendo :

$$EI = \frac{E_wE_sA_w + E_s^2A_s}{E_wA_w + E_sA_s}(I_s + n_wI_w) \dots\dots\dots (53)$$

Sendo :

- n_w = a razão modular dada pela expressão (28) ;
- I_s = momento de inércia da chapa de aço em relação ao eixo 3
(horizontal à seção transversal);;
- I_w = momento de inércia da madeira serrada em relação ao eixo 3
(horizontal à seção transversal);

E_s = módulo de elasticidade da chapa de aço ;

E_w = módulo de elasticidade da madeira ;

A_s = área da seção transversal da chapa de aço;

A_w = área da seção transversal da madeira .

4. DETERMINAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA

Em uma viga carregada transversalmente , conforme fig. 14, observarmos que seu eixo, inicialmente reto, descreve uma curva que recebe o nome de linha elástica .

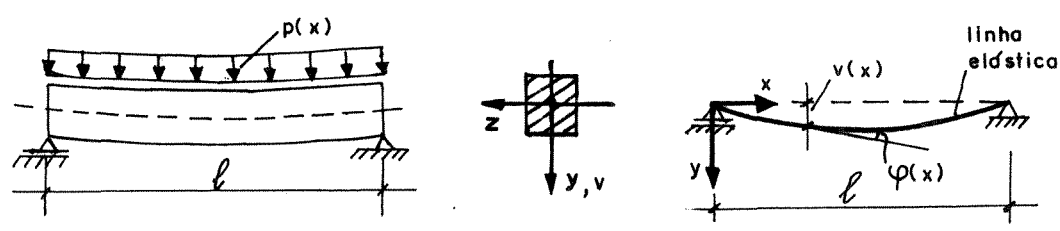


Figura 14 Linha elástica da barra devido ao carregamento transversal

A equação diferencial que relaciona o momento com a curvatura pode ser apresentada na forma incompleta para a curvatura como sendo :

$$M_x = E_x I_z v_x'' \dots\dots\dots(54)$$

A seguir apresentamos os procedimentos , através dos conceitos de energia de deformação para a determinação da linha elástica .

4.1 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Seja a fig. 14 a representação de uma viga mista em chapa dobrada enrijecida e alma de madeira (transformada) , com um estado uniaxial de tensões $\sigma_y = 0$; as deformações podem ser escritas , segundo os módulos de elasticidade e os coeficientes de Poisson do conjunto:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} \dots\dots\dots (55)$$

$$\epsilon_y = - \frac{\nu_{xy}\sigma_x}{E_x} \dots\dots\dots (56)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \dots\dots\dots (57)$$

A energia de deformação específica (por unidade de volume) da viga pode ser descrita como sendo :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \dots\dots\dots (58)$$

SILVERMAN apud CARRASCO ^[11], coloca que podemos desprezar a deformação na direção y (ϵ_y), e além disso na direção z (ϵ_z) também. Assim, a equação (58) fornece a energia de deformação da viga mista com a seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\int_A (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA \right] dx \dots\dots\dots (59)$$

A tensão devida à flexão é escrita da seguinte forma :

$$\sigma_x = \frac{M_x y}{I_z} \dots\dots\dots (60)$$

Sendo que :

- M_x = é o momento fletor num ponto da viga ;
- y = é a distância de um ponto na seção transversal até o eixo neutro da viga ;
- I_z = momento de inércia em relação ao eixo z .

As tensões de cisalhamento são definidas por :

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{bI_z} \dots\dots\dots (61)$$

Onde :

- V = é a força cortante num ponto da viga ;
- S = é o momento estático de um ponto considerado da seção transversal ;
- b = é a largura da seção que contém o ponto em análise ;

Com as equações (55) ,(57) , (60) e (61), inseridas em (59) , sendo A a área da seção transversal da viga transformada , encontramos :

$$U = \int_0^l \frac{M_x^2}{2E_x I_z} dx + \int_0^l \frac{V_x^2}{2G_{xy} A} dx \cdot \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA (62)$$

Ao fator $\frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA$, denomina - se fator de forma “c” , e será analisado em separado em outro capítulo .

Para um pequeno elemento dx da viga , conforme mostra a fig. 15 , podemos computar uma informação útil sobre a força cortante V , através da tensão de cisalhamento, ou seja :

$$\text{tg } \gamma \equiv \gamma = \frac{dv}{dx} (63)$$

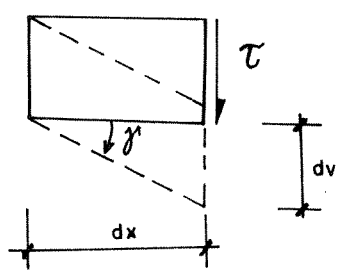


Figura 15 Deformação por cisalhamento

Com as equações (57) e (63) , e sabendo - se que $\tau_{xy} = c \cdot \frac{V}{A}$, encontramos a seguinte expressão :

$$V = \frac{G_{xy}Av'}{c} \dots\dots\dots (64)$$

Desta maneira , com o apoio das equações (54) e (64) , incrementadas em (62), chegamos à função que nos fornece a energia de deformação do conjunto , que vale:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (E_x I_z v''^2 + \frac{G_{xy}Av'^2}{c}) dx \dots\dots\dots (65)$$

4.2 O PROBLEMA VARIACIONAL DA VIGA DE SEÇÃO TRANSFORMADA

A energia interna, ou de deformação, é sempre positiva . Seu equilíbrio , ou seja , a equação diferencial de equilíbrio, é atingida através da minimização da energia potencial, através do cálculo variacional , utilizando-se a equação de Euler . Podemos aplicar a minimização , porque em se tratando de cargas em regime estático, ou muito lenta , a energia de deformação é uma forma de energia potencial .

Para a viga mista , a energia potencial total pode ser verificada adotando-se o seguinte esquema estático :

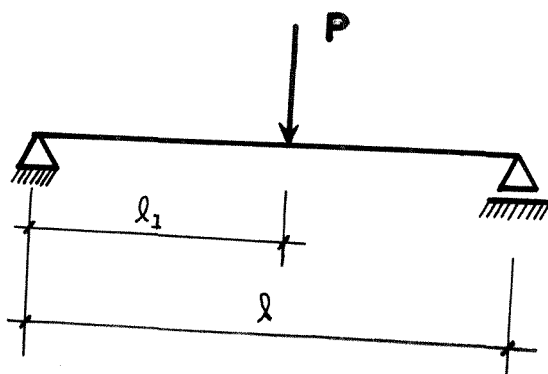


Figura 16 Esquema estático da viga mista

O trabalho das cargas externas (W) no ponto indicado por ℓ_1 , é igual ao produto força pelo seu deslocamento, ou seja :

$$W = - P v(\ell_1) \dots \dots \dots (66)$$

A energia potencial total será :

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} (E_x I_z v''^2 + \frac{G_{xy} A v'^2}{c}) dx - P v(\ell_1) \dots \dots \dots (67)$$

Embora não conheçamos a função da linha elástica da viga $v(x)$, sabemos que ela deve atender as condições de vinculação e continuidade .

A continuidade do funcional é impedida pela carga concentrada, pois este ponto é um local de descontinuidade das funções . Desta maneira introduzimos os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 , onde λ_1 garantirá a continuidade para os deslocamentos $v(x)$, λ_2 a continuidade das rotações $v'(x)$. A falta do multiplicador λ_1 implicaria na existência de deslocamentos descontínuos, e a ausência de λ_2 , indicaria a existência de uma articulação, sendo as rotações descontínuas .

Assim, teremos uma linha elástica (v_1) de zero até ℓ_1 , e outra (v_2), de ℓ_1 até o comprimento ℓ , e o seu funcional tem a seguinte expressão :

$$\pi = \left(\int_0^{t_1} \frac{E_x I_z v_1'^2}{2} + \int_{t_1}^t \frac{E_x I_z v_2'^2}{2} + \int_0^{t_1} \frac{G_{xy} A v_1'^2}{2c} + \int_{t_1}^t \frac{G_{xy} A v_2'^2}{2c} \right) dx - P v_{(t_1)} + \lambda_1 [v_{1(t_1)} - v_{2(t_1)}] + \lambda_2 [v_{1'(t_1)} - v_{2'(t_1)}] \dots \dots \dots (68)$$

Aplicando a equação de Euler , das considerações do ANEXO 1 , no funcional da viga mostrado na expressão (68) , encontramos a equação diferencial que determina a elástica de v_1 que realiza um extremo no funcional , e vale :

$$E_x I_z v_1^{IV} - \frac{G_{xy} A v_1''}{c} = 0 \dots \dots \dots (69)$$

Analogamente a elástica de v_2 é representada como :

$$E_x I_z v_2^{IV} - \frac{G_{xy} A v_2''}{c} = 0 \dots \dots \dots (70)$$

Sendo que as primeiras parcelas das expressões (69) e (70) , correspondem a parte de flexão , e as segundas parcelas ao cisalhamento .

Os deslocamentos provocados pela flexão ou cisalhamento podem ser calculados separadamente para cada elástica , dependendo apenas da energia de deformação provocada pelo tipo de esforço . Esta condição nos parece útil , uma vez que isto possibilita avaliar a contribuição nos deslocamentos verticais de cada parcela (flexão e cisalhamento) .

Através do funcional da expressão (68) , e o esquema estático da figura 16 , ou seja , uma carga concentrada na viga , e ainda considerando somente o efeito do deslocamento por esforço cortante , conforme mostrado no ANEXO 1 , determinamos as elásticas de v_1 e v_2 , respectivamente , como sendo :

$$\frac{G_{xy}Av_1}{c} = -\frac{P\ell_1}{\ell} x + Px \dots\dots\dots (71)$$

$$\frac{G_{xy}Av_2}{c} = -\frac{P\ell_1}{\ell} x + P\ell_1 \dots\dots\dots (72)$$

Se admitirmos para a viga de seção transformada que $\ell_1 = \frac{\ell}{2}$, e $x = \frac{\ell}{2}$, encontraremos desta forma , o seguinte resultado:

$$v_1 = v_2 = c \frac{P\ell}{4G_{xy}A} \dots\dots\dots (73)$$

Com o funcional da expressão (68) , o esquema estático da figura 16 , que mostra uma carga concentrada na viga , e considerando somente o efeito do deslocamento por esforço devido à flexão , conforme ANEXO 1 , as elásticas de v_1 e v_2 são , respectivamente:

$$v_1 = \frac{1}{E_x I_z} \left(\frac{P\ell_1 x^3}{6\ell} - \frac{Px^3}{6} + \frac{P\ell_1 \ell x}{3} + \frac{P\ell_1^3 x}{6\ell} - \frac{P\ell_1^2 x}{2} \right) \dots\dots\dots (74)$$

$$v_2 = \frac{1}{E_x I_z} \left(\frac{P \ell_1 x^3}{6\ell} - \frac{P \ell_1 x^2}{2} + \frac{P \ell_1 \ell x}{3} + \frac{P \ell_1^3 x}{6\ell} - \frac{P \ell_1^3}{6} \right) \dots\dots\dots (75)$$

Ao admitirmos que $\ell_1 = \frac{\ell}{2}$ e $x = \frac{\ell}{2}$, encontramos a mesma equação dada pela ,

Resistência dos Materiais , descrita como :

$$v_1 = v_2 = \frac{P \ell^3}{48 E_x I_z} \dots\dots\dots (76)$$

O deslocamento vertical total é a soma da parcela referente à cortante e flexão, dadas pelas respectivas equações , (71) e (74) , considerado-se à linha elástica de v_1 , bem como somando-se (72) e (75) teremos a linha elástica de v_2 .

5. DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA

Na literatura sobre esse assunto verificamos que LANGENDONCK^[20] coloca o fator de forma como sendo o quociente entre a tensão de cisalhamento média e a tensão de cisalhamento no centro de gravidade da seção .

TIMOSHENKO e GERE^[36] afirmam que podemos usar o fator de forma encontrado na parcela da energia de deformação para corrigir a tensão de cisalhamento, sendo que esta encontra - se indicada como uma parte da equação (62) , que podemos reescrever da seguinte forma :

$$c = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^2}{b^2} dA (77)$$

O fator de forma pode ser aplicado sobre os elementos aço e madeira da viga mista separadamente , assim encontramos que :

$$c_s = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^2}{b_s^2} dA (78)$$

$$c_w = \frac{A}{I_z^2} \int_A \frac{S^2}{b_w^2} dA (79)$$

Onde :

A = é área equivalente total do elemento considerado;

I_z = é o momento de inércia em relação ao eixo neutro da peça ;

S = é o momento estático;

b = é a largura do elemento ;

Os índices s e w representam respectivamente o aço e a madeira

A seguir serão calculados os valores dos coeficientes de forma para a viga de seção composta .

5.1 DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA PARA A CHAPA METÁLICA DOBRADA

Vamos calcular o fator de forma aplicando a expressão (78) para a chapa metálica , de acordo com a fig. 17.

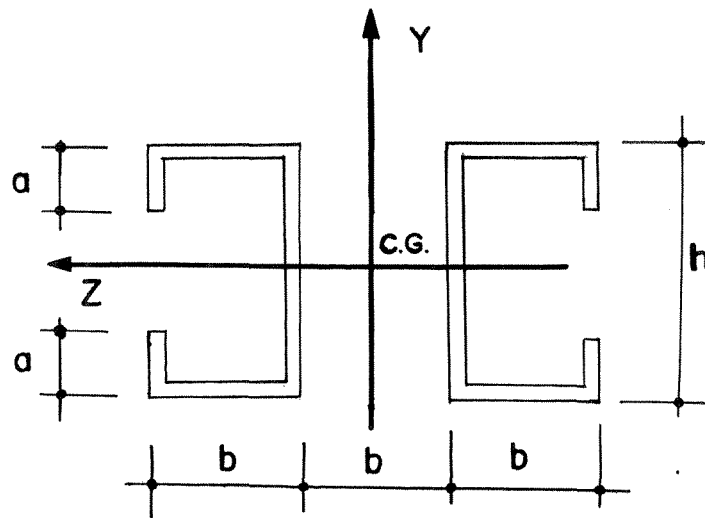


Figura 17 Viga composta por chapa metálica

Desenvolvendo a integral , detalhada no ANEXO 2 , o valor do fator de forma considerando - se somente o chapa metálica da viga mista vale :

$$c_s = \frac{4eA_1}{I_1^2} \left(\frac{a^3h^2}{12} - \frac{ha^4}{8} + \frac{a^5}{20} \right) + \frac{4eA_2(b-2e)}{I_2^2} \left(\frac{e^3h^2}{12} - \frac{he^4}{8} + \frac{e^5}{20} \right) + \frac{4eh^5A_3}{240I_3^2} \dots(80)$$

Onde :

A_1 = área do total do lábio enrijecedor ;

I_1 = momento de inércia do lábio enrijecedor ;

A_2 = área total das abas;

I_2 = momento de inércia das abas;

A_3 = área das almas ;

I_3 = momento de inércia das almas ;

e = espessura da chapa metálica .

5.2 DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA PARA A MADEIRA

Agora , vamos calcular o fator de forma aplicando a expressão (79) para a madeira, utilizada na parte central da viga mista , conforme mostra a fig. 18, com a seguinte geometria :

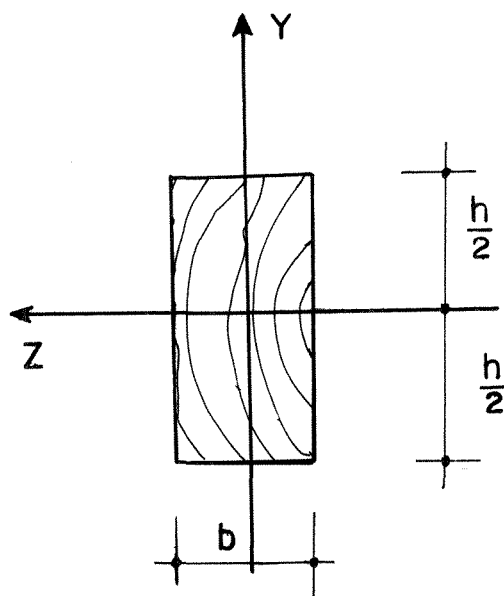


Figura 18 Seção retangular em madeira

Desenvolvendo a integral , detalhado no ANEXO 3 , o valor do fator de forma de um retângulo em madeira tem a seguinte expressão :

$$c_w = \frac{A_w 2bh^5}{240I_w^2} = 1,2..... (81)$$

Onde :

A_w = área da seção transversal ;

b = largura da madeira ;

h = altura da madeira ;

I_w = momento de inércia .

5.3 DETERMINAÇÃO DO FATOR DE FORMA PARA A VIGA MISTA (TRANSFORMADA)

A viga mista transformada tem um comportamento similar à viga composta só com chapa metálica , pois aplicando a expressão (77) numa viga qualquer já transformada conforme mostra a fig. 19, encontramos uma equação similar à expressão (80) .

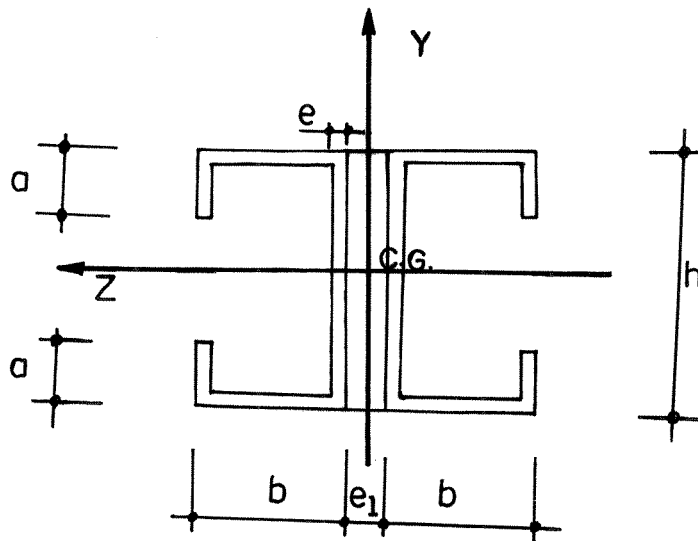


Figura 19 Viga mista transformada

Desenvolvendo a integral (67), detalhada no ANEXO 4 , o valor do fator de forma considerando - se a viga mista (transformada) vale :

$$c = \frac{4eA_1}{I_1^2} \left(\frac{a^3h^2}{12} - \frac{ha^4}{8} + \frac{a^5}{20} \right) + \frac{4eA_2(b-2e)}{I_2^2} \left(\frac{e^3h^2}{12} - \frac{he^4}{8} + \frac{e^5}{20} \right) + \frac{2(e_1+2e)h^5A_3}{240I_3^2} \dots(82)$$

Onde :

A_1 = área do total da aba enrijecedora ;

I_1 = momento de inércia da aba enrijecedora ;

A_2 = área total das abas;

I_2 = momento de inércia das abas;

A_3 = área da alma (considerando a seção transformada) ;

I_3 = momento de inércia das almas (considerando a seção transformada) ;

e = espessura da chapa metálica ;

e_1 = espessura da madeira transformada (equivalente) .

5.4 CÁLCULO DO FATOR DE FORMA DE ALGUMAS VIGAS UTILIZADAS PELOS FABRICANTES

As vigas de seção mista em chapas de aço dobradas enrijecidas e almas de madeira solidarizadas por parafusos no padrão da COFIX^B, têm chapa de espessura 2,65 mm e encontram-se à disposição no mercado consumidor em 3 padrões básicos. Apresentam as características geométricas mostradas na fig. 20. Com esses valores inseridos na equação (82), encontramos os seguintes valores para os fatores de forma:

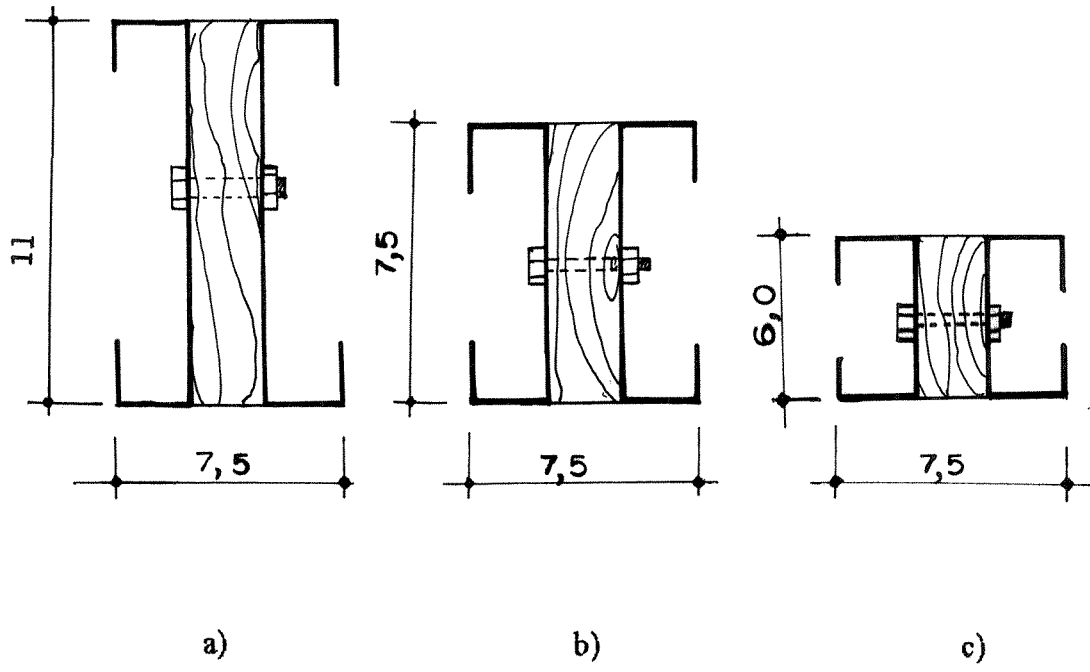
Figura 20 a) → $c = 1,23$

Figura 20 b) → $c = 1,23$

Figura 20 c) → $c = 1,25$

O espaçamento entre parafusos para as vigas mostradas na fig. 20 a), que são as vigas principais, giram em torno de 115 cm, e os demais (fig. 20 b e 20 c) em torno de 60 cm.

^B Empresa fabricante de vigas mistas para cimbramentos metálicos



(dimensões em cm)

Figura 20 Vigas padrão COFIX

6 ANÁLISE DA CHAPA DE AÇO .

Neste capítulo apresentamos os aspectos mais importantes a respeito da chapa de aço. No tocante ao dimensionamento e verificação da chapa ,devem ser observados , o escoamento do material , a flambagem local por compressão da mesa ou da alma e a flambagem lateral .

Quando não ocorrer flambagem lateral ou local , e houver flexão no plano de carregamento, o escoamento do material é o fator limitante ; assim , o dimensionamento empregado é simplificado através dos cálculos tradicionais . Entretanto , cabe - nos ainda observar que a utilização de chapa metálica , conforme relata GALAMBOS^[14] , para seções de parede fina composta de dois perfis “c” , lado a lado , a altura da peça deve ser normalmente de 2,54 cm a 30,48 cm e a espessura da chapa até 1,27 cm aproximadamente .

Além dessas verificações a NBR 8800^[6] , recomenda que para peças em aço estrutural a esbeltez máxima será proferida como :

$\lambda \leq 240$ para peças consideradas principais ;

$\lambda \leq 300$ para peças consideradas secundárias .

6.1 FLAMBAGEM LOCAL

Em vigas mistas com chapa dobrada de aço é possível verificar o fenômeno da flambagem local, como pode ser visto na fig. 21, e assim quantificá-la através da tensão normal, e avaliar sua influência na chamada tensão crítica.

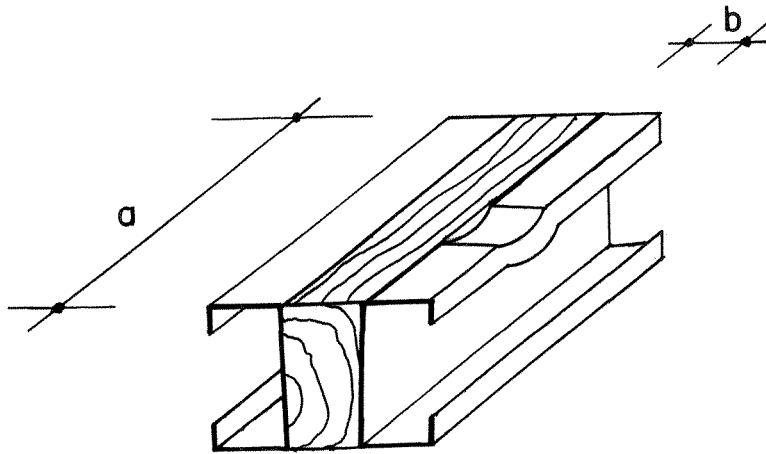


Figura 21 Flambagem local da mesa por compressão.

TIMOSHENKO^[38] estuda esse problema analisando chapas de espessura t , largura b e módulo de elasticidade E conforme mostra a fig. 22.

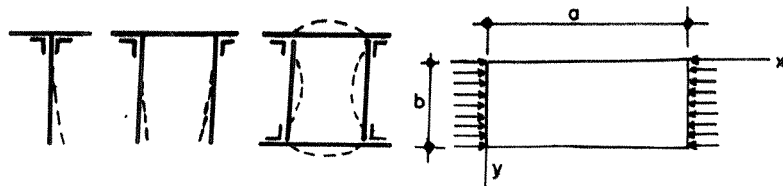


Figura 22 Chapa submetida a força de compressão

Fonte TIMOSHENKO ^[38]

A equação na forma condensada , desenvolvida por TIMOSHENKO^[38] para a verificação das mesas, tem a seguinte forma :

$$\sigma_{cr} = K_c E \left(\frac{t}{b} \right)^2 (83)$$

Onde K_c representa um coeficiente que depende das condições de bordo .

Segundo BRESLER , apud STRAUCH^[35] , o coeficiente K_c para o estudo de vigas “T”, tem os seguintes valores para as condições de contorno da chapa :

- ambos os lados apoiados _____ 3,6
- um lado apoiado e o outro engastado _____ 4,9

- ambos os lados engastados _____ 6,3
- um lado apoiado e o outro livre _____ 0,38
- um lado engastado e o outro livre _____ 1,15

Esses coeficientes são considerados a partir da seção transversal da viga , como no exemplo da fig. 22 , sendo que as condição de contorno são as da mesa .

A verificação da alma , estando esta sob a ação do momento ou da cortante pode ser escrita como :

$$\sigma_{cr} = K_w E \left(\frac{t_w}{h_w} \right)^2 (84)$$

O coeficiente K_w depende das condições de borda da alma , além do tipo de ação, que poderá ser momento fletor ou força cortante .

Considerando - se somente a ação do momento fletor para a análise da alma , o coeficiente K_w vale :

- Borda livre _____ 21,5
- Borda engastada _____ 35,7

Em se tratando de esforço cortante os coeficientes são :

Borda livre_____ 4,8
borda engastada_____ 8,1

Desta maneira calculamos a tensão crítica de flambagem local na alma .

6.2 FLAMBAGEM LATERAL

FRUCHTENGARTEN^[13] relata que a verificação da flambagem lateral consiste em calcularmos o momento crítico(M_{cr}) e compararmos com o momento de serviço (M) , de tal maneira que , se ocorrer :

$M < M_{cr} \rightarrow$ apenas ocorre deslocamentos verticais (posição plana é de equilíbrio estável);

$M = M_{cr} \rightarrow$ ocorre flambagem lateral .

O valor do momento crítico de flambagem elástica para o caso de peças de seção bissimétrica tem a seguinte expressão :

$$M_{cr} = \sqrt{P_y P_z I_z^2} (85)$$

Onde :

$$P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} \quad (\text{carga crítica de flambagem em torno do eixo } y)$$

$$P_z = \frac{GI_t}{r_z^2} \left(1 + \frac{\pi^2 z^2}{\ell^2} \right) \quad (\text{carga crítica em torno do eixo } z);$$

$$r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (\text{raio de giração em torno do eixo } x);$$

$$z = \sqrt{\frac{EJ_w}{GI_t}};$$

I_t = momento de inércia à torção ;

r_z = raio de giração em torno do eixo z ;

J_w = (constante de empenamento \rightarrow momento de inércia setorial);

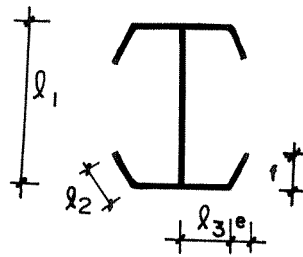


Figura 23 Seção transversal em "I" qualquer

Fonte LANGENDONCK^[20] página 86

LANGENDONCK^[20] determina o momento de inércia setorial para figuras geométricas de seções delgadas abertas , com pelo menos um eixo de simetria ou de antimetria . Para seções transversais em forma de “I” , como mostra a figura 23 , temos :

$$J_w = \frac{t_3 \ell_1^2 \ell_3^3}{3} + \frac{t_2 \ell_2}{3} \left(3 \ell_1^2 \ell_3^2 + 6 h \ell_1 \ell_2 \ell_3 + 4 h^2 \ell_2^2 \right) \dots\dots\dots (86)$$

Sendo que na expressão (86) , $h = \frac{\ell_1 e + 2 \ell_3 f}{2 \ell_2}$.

Entretanto para a viga de seção mista com a seguinte seção transversal :

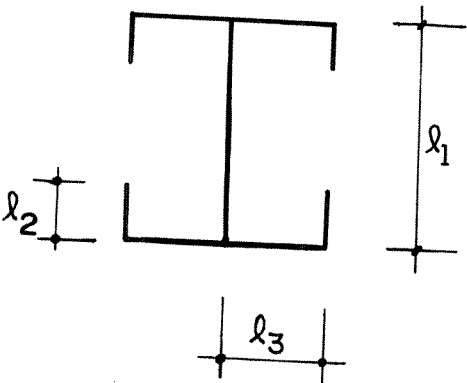


Figura 24 Geometria da seção da viga mista transformada

Sendo que :

$\ell_{1,2,3}$ = comprimento dos trechos 1, 2 ou 3 ;

t = espessura do trecho considerado .

o comprimento “ e “ identificado na fig. 23 , vale zero .

Assim sendo , o momento de inércia setorial , será :

$$J_w = \frac{t_3 \ell_1^2 \ell_3^3}{3} + \frac{t_2 \ell_2}{3} \left(3 \ell_1^2 \ell_3^2 + 6 \ell_1 \ell_2 \ell_3^2 + 4 \ell_2^2 \ell_3^2 \right) \dots\dots\dots (87)$$

Segundo LANGENDONCK^[19] , o momento de inércia à torção , pode ser escrito da seguinte forma :

$$I_t = \sum \frac{\ell_n t_n^3}{3} \dots\dots\dots (88)$$

Onde n é o trecho considerado , ℓ o comprimento , e t a espessura .

Admitindo-se os dados da figura 24 , temos :

$$I_t = \frac{\ell_1 t_1^3 + 4 \ell_2 t_2^3 + 4 \ell_3 t_3^3}{3} \dots\dots\dots (89)$$

7 ESTUDO DAS LIGAÇÕES

7.1 GENERALIDADES

As ligações entre as partes componentes da seção transversal, feitas com parafusos, assumem importante papel para o bom desempenho das vigas mistas .

As ligações das vigas mistas, em chapas de aço dobrada e em madeira são solidarizadas por parafusos e, quase sempre, não são utilizadas arruelas para o aperto das mesmas . Essa prática tem sido consolidada por quase todas as empresas que fabricam esse tipo de equipamento para a construção civil e , a princípio, no modelo aqui estudado .

MERRITT^[28] classifica as ligações em : simples, ou seja , aquelas que permitem um pequeno deslocamento horizontal e transmitem os esforços de cisalhamento ; e em conexões rígidas , que são aquelas que permitem uma perfeita e completa transferência dos esforços de flexão e cisalhamento e as semi - rígidas, que compõem um estado intermediário entre os tipos rígidos e flexíveis .

LUCHESE e STAMATO^[23] , com o intuito de determinar as cargas admissíveis para ligações de peças de peroba rosa com parafusos de aço , montaram os corpos de prova de tal forma que os parafusos eram analisados como pino. Isto é equivalente a parafusos sem

porcas e arruelas , desconsiderando o atrito provocado pelas mesmas . A justificativa sustentada por esses pesquisadores é que apesar de impedir o escorregamento relativo entre as peças, apresentam um grande inconveniente , pois necessitam de apertos periódicos para manter a condição de atrito . Além disto, comentam que o atrito pode ser considerado em cimbramentos e outras obras provisórias . Isto se deve ao fato de que as cargas aplicadas tem duração pequena neste tipo de estrutura . Outro fato importante, refere - se as peças utilizadas pelas empresa que passam por uma constante manutenção , após utilização na obra.

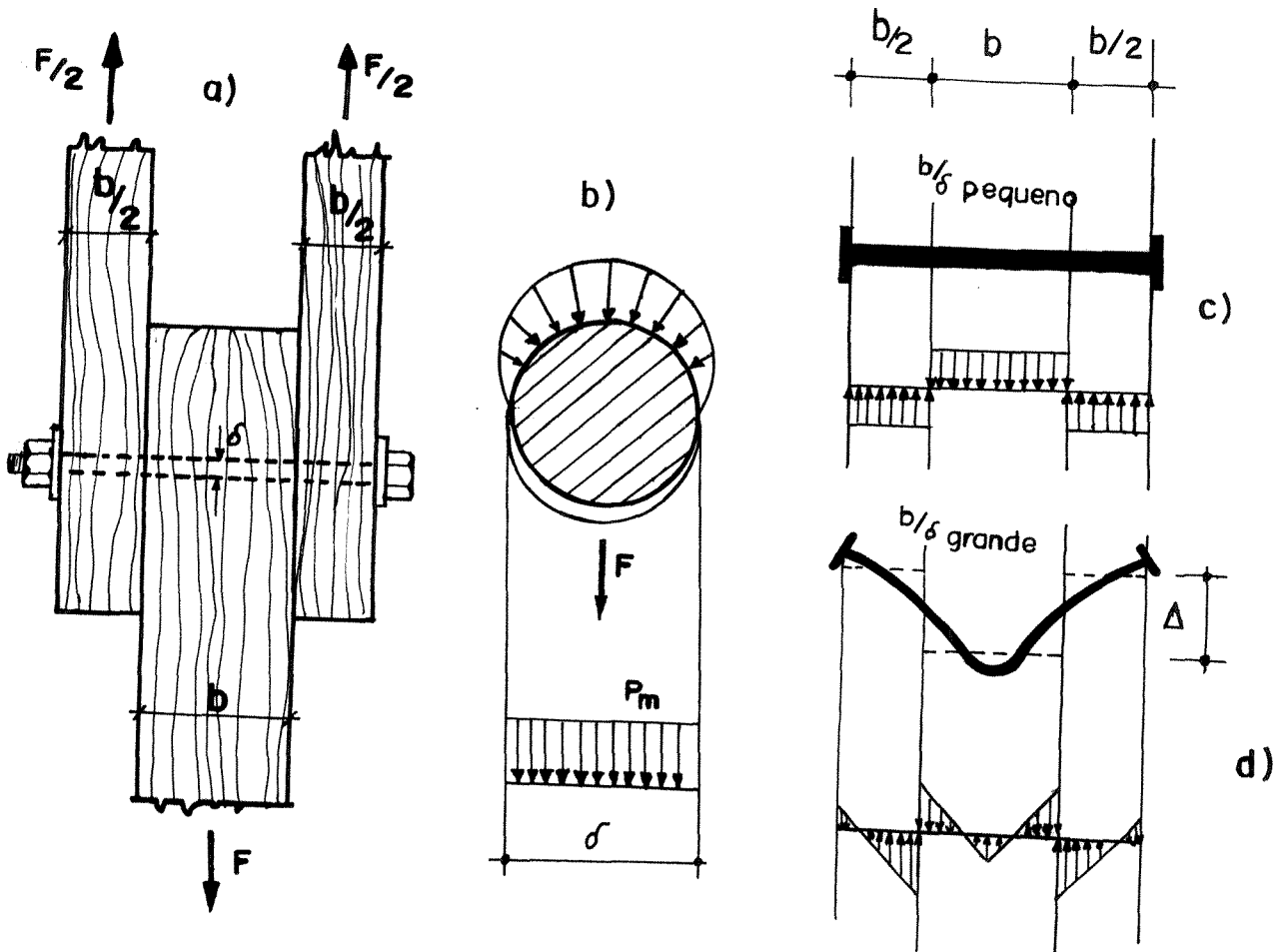


Figura 25 Ações e esforços sobre o parafuso aplicado em ligações na madeira

Fonte LUCHESE e STAMATO^[23] página 3

Observam esses pesquisadores que a relação entre o comprimento do parafuso e a espessura (b/δ) interfere sensivelmente na resistência da ligação como mostra a fig. 25 em ensaios aplicados à madeira .

Considerando - se a pressão média P_m na seção transversal do parafuso como distribuída uniformemente sobre o diâmetro através da resultante F (fig. 25b) , LUCHESE e STAMATO^[23] verificaram (fig. 25c) que : se b/δ tem uma relação muito pequena , a ligação por parafuso é considerado rígida . Caso a relação b/δ seja muito grande , a ligação por parafuso é considerada flexível, conforme mostra a fig. 25d . Se houver arruelas, essas criam um engastamento parcial nas extremidades do parafuso , assim o parafuso é tracionado e este pressiona a arruela contra as peças laterais que, por sua vez , desenvolvem forças de atrito que absorvem parte do esforço F .

AGOSTINI, CATTO e STAMATO^[2] estudaram ligações de pinho do Paraná e de eucalipto citriodora com parafusos de aço , e relataram que o parafuso sofreu deformações formando rótulas plásticas . Comentaram também que quando a ligação por parafuso é muito rígida a relação b/δ é em geral inferior a 3 , assim como também com a relação superior a 6 é muito esbelta . Isto é também comentado por LISBOA ^[22], conforme mostra a fig. 26, onde observamos esquematicamente a formação de rótulas advindas de flexão do pino. Esse pesquisador considera a numeração de 1 (um) a 4 (quatro) , e define :

Rótulas externas \rightarrow 1 e 4 ;

Rótulas internas \rightarrow 2 e 3 ;

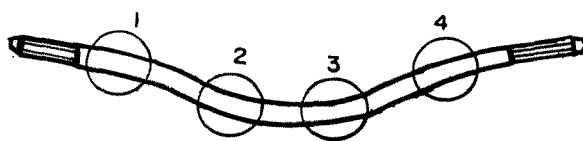


Figura 26 Parafuso deformado

Fonte LISBOA^[22] página 18

7.2 CRITÉRIOS DE DIMENSIONAMENTO

As chapas metálicas ao serem solidarizadas à madeira devem obedecer aos espaçamentos e distâncias mínimas das normas de estruturas metálicas .

Segundo ALMEIDA^[4], os modos de ruptura , como apresentados na fig. 27 , podem se apresentar de várias maneiras , e tem as seguintes características principais :

embutimento do pino na chapa (27a) ; cisalhamento (27b) ; e tração (27c) .

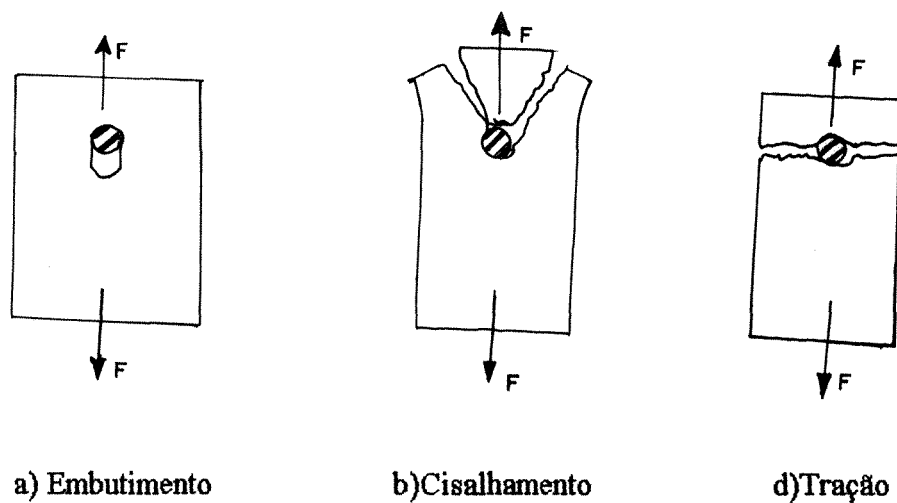


Figura 27 Modos de ruptura das chapas metálicas nas uniões .

Fonte ALMEIDA^[4] página 111

ALMEIDA , FUSCO e RODRIGUES ^[3] consideram que após a fase elástica as ligações parafusadas e pregadas apresentam grandes deformações , como mostra a fig. 28. Para se obter esta informação é observada a relação entre a força aplicada e o deslizamento das ligações parafusadas ou pregadas para madeiras , através de experimentação em laboratório .Normalmente o diagrama apresenta uma fase linear elástica e uma segunda chamada de elasto - plástica .

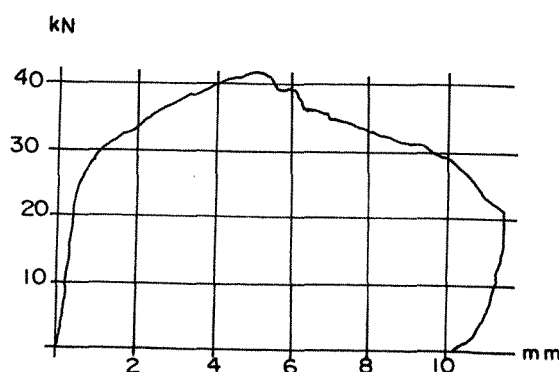


Figura 28 Diagrama carga x deslizamento típico das ligações de estruturas em madeiras.

Fonte ALMEIDA , FUSCO e RODRIGUES^[3] página 316

Os modos de ruptura das uniões estão apresentados na fig. 29 e identificados pela plastificação do pino por flexão (29a), embutimento do pino na madeira (29b) , cisalhamento da madeira (29c) e fendilhamento da madeira (29d) .

A determinação das cargas limites pode ser identificada através de ensaio de laboratório . Para isto são escolhidos alguns exemplares que devem ser no mínimo seis e obtidas estimativas dos valores característicos através da utilização da seguinte expressão :

$$F_{0,wk} = 1,1 \left[2 \frac{F_{0,1} + F_{0,2} + F_{0,3} + \dots + F_{0,\frac{n}{2}-1}}{\frac{n}{2} - 2} - F_{0,\frac{n}{2}} \right] \dots\dots\dots (90)$$

Com $F_{0,1} \leq F_{0,2} \leq \dots \leq F_{0,n}$

Sendo que :

F_0 = força correspondente ao limite de proporcionalidade da ligação ;

n = número de corpos de prova variando de 1 (um) até n

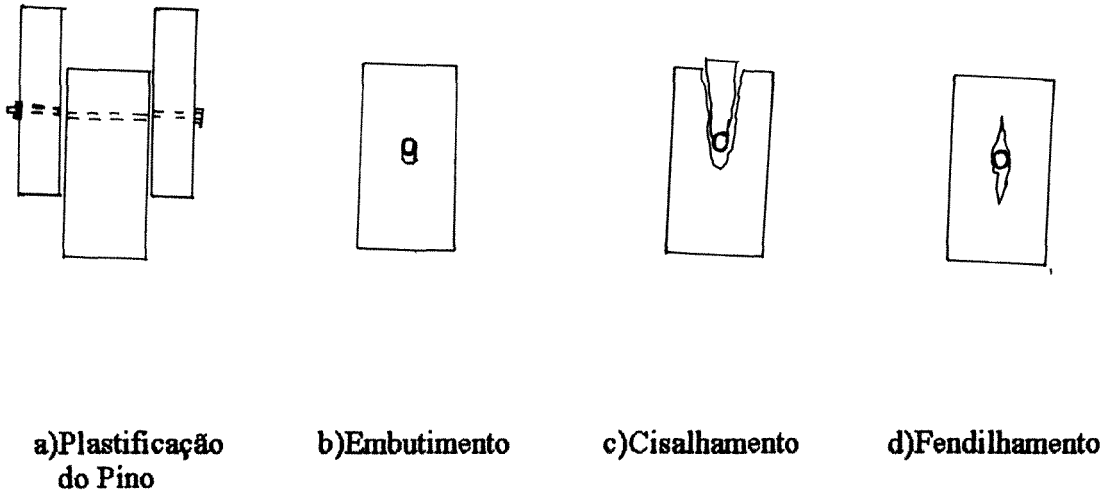


Figura 29 Modos de ruptura das ligações (madeira)

Fonte ALMEIDA , FUSCO ,e RODRIGUES ^[3] página 317

Para determinação da força correspondente ao limite de proporcionalidade F_0 verifica-se o valor de carregamento correspondente à deformação específica de $2,5 \text{ } \text{‰}$ de acordo com o diagrama idealizado na fig. 30 , carga por deformação específica .

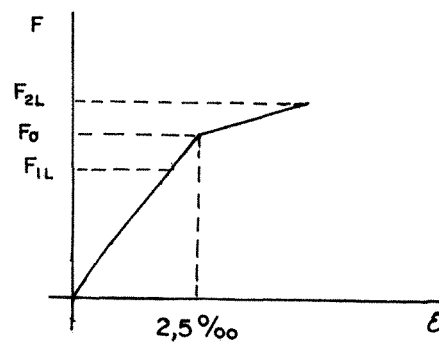


Figura 30 Diagrama Carga x deformação específica idealizado.

Fonte ALMEIDA , FUSCO ,e RODRIGUES ^[3] página 317

sendo que :

$F_{1L} = 0,80 F_0$, correspondente ao primeiro limite

$F_{2L} = 1,20 F_0$, correspondente ao segundo limite

7.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE PARAFUSOS

A AÇOMINAS^[1], empresa siderúrgica nacional, considera que as ligações para estruturas de aço dividem - se em dois grupos e caracterizam - se pelo tipo de solidarização empregada, sendo consideradas como :

-As permanentes, ou seja, aquelas feitas com rebites e soldas.

-As ligações desmontáveis ou removíveis, executadas por parafusos e pinos.

Os parafusos utilizados em construções metálicas têm cabeça sextavada e são classificados em três grupos distintos como segue :

a) Parafusos comuns → A tolerância admissível entre o furo e o corpo do parafuso deve ser ≤ 3 mm. Estes parafusos não são aconselháveis para ligações de peças sujeitas a cargas dinâmicas. São utilizados normalmente em estruturas leves ou peças de menor importância estrutural. Considerando a utilização desses parafusos em vigas mistas recomendamos uma tolerância ≤ 1 mm

b) Parafusos usinados ou de tolerância fina → São aqueles empregados em estruturas sujeitas a cargas dinâmicas. A tolerância da folga entre o furo e o corpo do parafuso deve

ser $\leq 3\text{ mm}$. Eles têm uso restrito por causa do seu custo elevado . Como no caso anterior fazemos a mesma recomendação da tolerância $\leq 1\text{ mm}$.

c) Parafusos de alta resistência → São aplicados nas ligações onde os esforços são transmitidos por contato entre o corpo do parafuso e as paredes do furo, ou por atrito entre as peças a serem ligadas . Esses elementos transmitem cargas estáticas e dinâmicas .

A distância mínima entre as linhas de centros dos furos de chapas de aço não deve ser inferior a $2,7d$, sendo d o diâmetro nominal do parafuso, e a distância do furo à borda , conforme indicado na tabela 2 .

Diâmetro (mm)	Distância do furo à borda (mm)	
Diâmetro nominal do rebite ou parafuso	Borda cortada com serra ou tesoura	Borda laminada ou cortada a maçarico
13	26	20
16	29	22
19	32	25
22	38	28
25	44	31
28	50	37
32	58	42
>32	$1,75 \times \text{diâmetro}$	$1,25 \times \text{diâmetro}$

Tabela 2 Distância mínima entre a linha de centro de um furo à borda da chapa

Fonte AÇOMINAS^[1] , página 19

A NBR 8800^[6] especifica ainda que os parafusos submetidos à força cortante tem a seguinte resistência :

$$R_{dv} = 0,60 (0,42 A_p f_u) \dots\dots\dots (91)$$

Onde :

R_{dv} = força resistente de cálculo à força cortante para um parafuso;

A_p = área bruta baseada no diâmetro nominal “d” do parafuso e
igual a $\frac{\pi d^2}{4}$;

f_u = Resistência à tração do material do parafuso que consta do
anexo A da NBR 8800/1986^[6], e indicado na tabela 3 .

As indicações da tabela 3 , também fornecidas por essa norma apresentam algumas características para alguns aços utilizados em parafusos e barras rosqueadas , descritas a seguir :

(A) → Disponíveis também com resistência à corrosão atmosférica ;

(B) → C = carbono ;

T = temperado;

ARBL RC = Alta resistência e baixa liga, resistente à corrosão;

As quatro primeiras especificações da tabela 3 referem - se a parafusos e as duas últimas especificações às barras rosqueadas.

Especificações	Limite de escoamento (Mpa)	Resistência à tração (Mpa)	Diâmetro máximo (mm)	Tipo de Material (B)
ASTM A 307	-	415	100	C
ISO 898 Classe 4.6	235	390	36	C
ASTM A 325 (A)	635	825	12,7 ≤ d ≤ 25,4	C,T
	560	725	25,4 < d ≤ 38,1	
ASTM A 490	895	1035	12,7 ≤ d ≤ 38,1	T
ASTM A 36	250	400	100	C
ASTM A 588	345	485	100	ARBLRC

Tabela 3 Materiais usados em parafusos e barras redondas rosqueadas.

Fonte NBR 8800^[6] anexo A página 114

A área efetiva do parafuso é consolidada pela seguinte expressão :

$$A_r = \frac{\pi}{4} \left(d - \frac{0,9743}{n} \right)^2 2,54^2 (92)$$

Para os parafusos comuns de maneira geral as características geométricas apresentam-se como dados na fig. 31 .

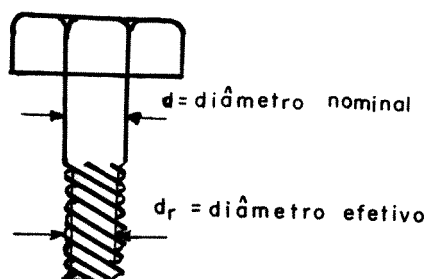


Figura 31 Propriedade geométricas do parafuso

Fonte FRUCHTENGARTEN^[13] página 193

Onde :

d = diâmetro nominal em cm ;

d_r = diâmetro efetivo ;

A_r = área efetiva ou “área de tensões” em cm^2 ;

n = número de fios de rosca por polegada

Normalmente, segundo FRUCHTENGARTEN^[13], a área efetiva é de 75 % da área nominal .

As empresas de cimbramentos metálicos optam por parafusos comuns , pois o fator custo é decisivo na compra . Desta maneira , também vamos adotar que a solidarização das peças será aquela já indicada pelo mercado , ou seja , parafuso comum .

7.4 DIMENSIONAMENTO DO PARAFUSO

Existem dois caminhos recomendados pela literatura . O primeiro leva em consideração o fluxo de cisalhamento entre as peças , resultante da força cortante atuante, quando as ligações são posicionadas na alma . O segundo leva em consideração o dimensionamento através do centro de cisalhamento e as ligações na mesa ou próximas a esta .

7.4.1 FLUXO DE CISALHAMENTO

O dimensionamento através do fluxo de cisalhamento presume que a transferência das tensões entre as peças , provocada pela força cortante, seja feita de maneira integral pelos conectores .

Para ilustrar esta situação vamos considerar um pequeno trecho da viga mista e analisar o desenvolvimento do seu equilíbrio , como mostrado na fig. 32. Assim, determinaremos a quantidade de parafusos necessários para que se estabeleça a solidarização das peças .

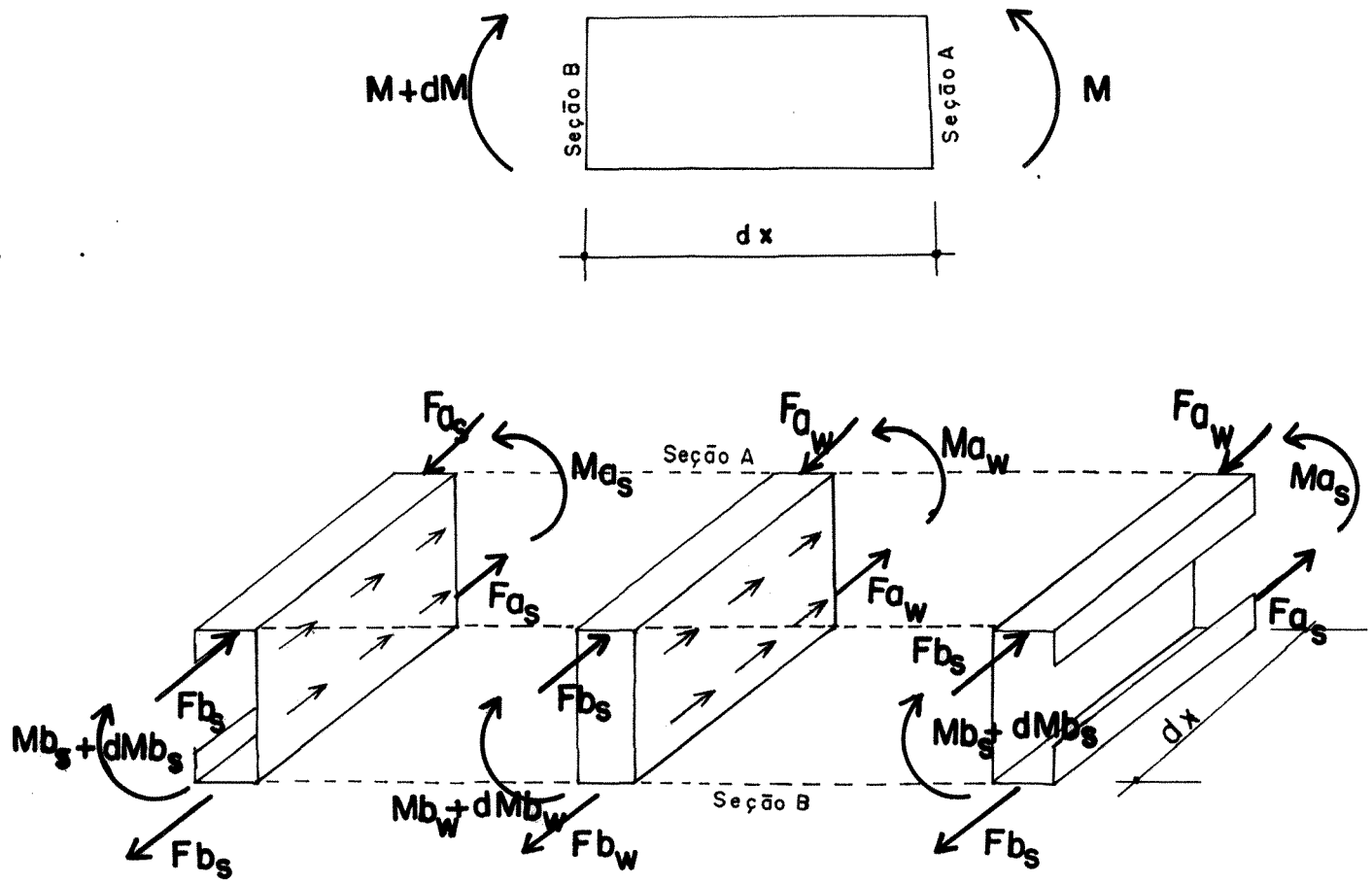


Figura 32 Elemento dx entre as seções A e B

Na fig. 32 admitindo-se que as forças F_{aw} e F_{bs} são diferentes entre si, e que na seção B existe uma tensão normal (σ_b) maior que na seção A, logo há um momento atuante maior neste ponto do que no outro. Esta tensão é conhecida por:

* Os subscritos s e w nas Equ. 32 representam, respectivamente, as componentes

$$\sigma_b = \frac{M_x}{I_z} y \dots\dots\dots (93)$$

Onde :

- M_x = momento fletor ;
- y = distância a partir da linha neutra medida no eixo y ;
- I_z = momento de inércia em relação ao eixo z .

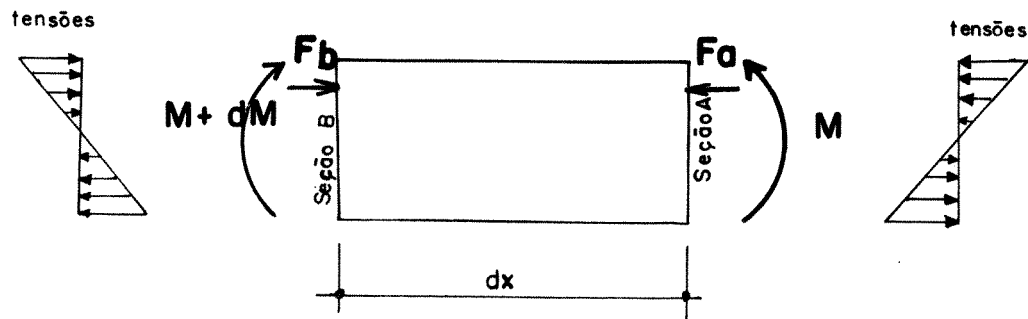


Figura 33 Elemento dx e o diagrama de tensões na seção transversal

Assim podemos destacar que a força dF , formada pela diferença entre aquela existente entre as seções B e A , como é mostrado esquematicamente na fig. 33 , pode ser descrita como:

$$dF = F_b - F_a \dots\dots\dots (94)$$

Entretanto , devemos ressaltar que a força dF é composta de duas parcelas, ou seja aço e madeira , como verificamos na fig. 32 :

$$dF = dF_s + dF_w (95)$$

Onde :

- dF = força infinitesimal dada pela expressão (94) ;
- dF_s = força infinitesimal nas chapas de aço ;
- dF_w = força infinitesimal na madeira .

Desta forma ,a expressão (93) inserida em (95) , na seção B, multiplicada pela área da seção transversal dA (trabalhando aqui com o método da seção transformada , desenvolvido no item 3.1 em que a área da madeira vale $n_w dA$) resulta a seguinte relação :

$$dF_b = \left(\frac{M_s + dM_s}{I_s} \right) y dA_s + \left(\frac{M_w + dM_w}{n_w I_w} \right) y n_w dA_w (96)$$

Onde :

- M_s = momento atuante na seção em aço ;
- dM_s = incremento ao momento do aço ;
- M_w = momento atuante na seção em madeira ;
- dM_s = incremento ao momento da madeira ;
- I_s = momento de inércia do aço em relação ao eixo transversal z ;

I_w = momento de inércia da madeira em relação ao eixo transversal z ;

n_w = transformação da área ou do momento de inércia = $\frac{E_w}{E_s}$.

Analogamente , na seção A , tem a seguinte expressão :

$$dF_s = \frac{M_s}{I_s} y dA_s + \frac{M_w}{I_w} y dA_w \dots\dots\dots (97)$$

Associando - se as equações (96) e (97) , e aplicando em (94) temos :

$$dF = \frac{dM_s}{I_s} y dA_s + \frac{dM_w}{I_w} y dA_w \dots\dots\dots (98)$$

A força dF é produzida pelas tensões de compressão na fibra superior a partir do eixo neutro mostrado na expressão (93) , e se integrarmos a função dF temos :

$$F = \int_0^y dF = \int_0^y \frac{dM_s}{I_s} y dA_s + \int_0^y \frac{dM_w}{I_w} y dA_s \dots\dots\dots (99)$$

Rearranjando- se a equação (99) encontramos que :

$$dF = \frac{dM_s}{I_s} \int_0^y y dA_s + \frac{dM_w}{I_w} \int_0^y y dA_w \dots\dots\dots (100)$$

Como sabemos $\int_0^y ydA$ é o momento estático (S) , logo a equação (100) pode ser descrita da seguinte forma :

$$dF = \frac{dM_s S_s}{I_s} + \frac{dM_w S_w}{I_w} (101)$$

Entretanto , desejamos saber o fluxo de cisalhamento (q) no elemento dx da viga mista ; logo basta dividir a força dF pelo elemento dx e assim temos :

$$q = \frac{dF}{dx} (102)$$

Ao aplicarmos a expressão (101) em (102) , e sabendo-se que a força cortante é dada pela relação $V = \frac{dM}{dx}$, determinamos o fluxo de cisalhamento que tem a seguinte expressão :

$$q = \frac{V_s S_s}{I_s} + \frac{V_w S_w}{I_w} (103)$$

A dificuldade presente aqui está em saber qual a força cortante em cada material . Mas estes valores podem ser extraídos através de estudos elaborados por GIRHAMMAR e GOPU [15], que fazem uma análise de primeira ordem para conectores em vigas de seção T , estabelecendo que a cortante (V) advém da razão entre a rigidez do elemento analisado e a rigidez total da peça multiplicada pela cortante da seção composta , ou seja :

$$V_s = \frac{E_s I_s}{EI} V \dots\dots\dots (104)$$

A rigidez total é a somatória das rigidezes parciais . Desta forma , temos :

$$EI = E_s I_s + E_w I_w \dots\dots\dots (105)$$

Assim a força cortante que atua na madeira pode ser expressa como :

$$V_w = \frac{E_w I_w}{EI} V \dots\dots\dots (106)$$

A relação mostrada em (102) também pode ser rearranjada e integrada e assim obtemos o cisalhamento total (F_{cis}) levando em consideração o comprimento da viga . Esta força deverá ser transmitida pelos parafusos , ou seja :

$$F_{cis} = \int_0^{\ell} q dx \dots\dots\dots (107)$$

Nessa expressão o comprimento ℓ a ser integrado é aquele que representa a extensão onde atua a força cortante na viga .

O número de parafusos N a ser empregado para a ligação dos elementos da viga mista (solicitado por corte duplo) pode ser determinado por:

$$N = \frac{F_{cis}}{2\bar{F}} \dots\dots\dots (108)$$

Sendo que \bar{F} representa a força admissível ao cisalhamento do parafuso .

7.4.2 CENTRO DE CISALHAMENTO EM SEÇÕES DELGADAS

Quando se analisam as tensões provocadas pelo esforço cortante tem importância saber qual o ponto onde as forças cisalhantes encontram equilíbrio na peça .

LANGENDONCK^[20] afirma que “seções delgadas abertas são aquelas formadas por elementos de pequena espessura em face das dimensões da seção e que não isolem nenhuma região do plano” . Os efeitos oriundos da torção devem ser considerados se o centro de cisalhamento não coincidir com o centro de gravidade (C.G.) da figura .

Um exemplo do cálculo do centro de cisalhamento , através da análise de um perfil c pode ser visto na fig. 34 .

O equilíbrio das forças do sistema apresentado neste exemplo deve existir . Assim sendo , as forças horizontais se anulam . A força cortante (V) da seção , que é a resultante da tensões de cisalhamento, deve passar por um ponto em que o momento resultante seja nulo :

$V \cdot m = F_1 \cdot h \dots\dots\dots(109)$

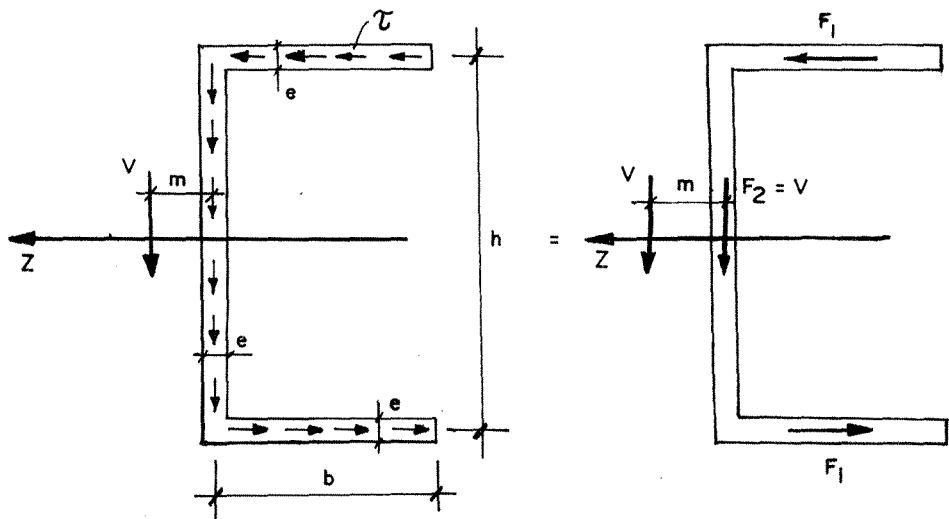


Figura 34 Tensão de cisalhamento em elemento com um eixo de simetria
Fonte ASSAN^[5] página 13

Rearranjando - se adequadamente a equação (109) , temos :

$m = \frac{F_1 \cdot h}{V} \dots\dots\dots(110)$

Onde :

V = força cortante ;

m = centro de cisalhamento ;

F_1 = Força horizontal provocada pelas tensões de cisalhamento ;

h = altura entre eixos das mesas .

Mas a força F_1 pode ser calculada através da seguinte equação :

$$F_1 = \frac{V}{I_z} \int_0^b S ds \dots\dots\dots (111)$$

Onde :

I_z = momento de inércia em relação ao eixo z no centro de gravidade ;

S = Momento estático ;

I_z = momento de inércia em relação ao eixo z no centro de gravidade .

Logo , substituindo - se (111) em (110) temos :

$$m = \frac{h \int_0^b S ds}{I_z} \dots\dots\dots (112)$$

MALITE^[24] calcula a distância do centro de cisalhamento do perfil “U” enrijecido nas bordas , utilizando-se da expressão (112) , com a seguinte equação :

$$m = \frac{w_f dt}{4I_x} \left[w_f d + 2 d_1 \left(d - \frac{4 d_1^2}{3d} \right) \right] \dots\dots\dots (113)$$

Onde :

- w_f = largura total da mesa descontando a espessura ;
- d = altura total do perfil ;
- t = espessura da chapa ;
- d_1 = altura total da aba enrijecedora ;
- I_x = momento de inércia da seção perpendicular à alma .

Um processo alternativo para o dimensionamento dos parafusos é dado por HARIS e WILLIAMS^[39], sendo também citado pela norma AISI (American Iron and Steel Institute) apud MALITE^[24]. Consideram que duas chapas dispostas lado a lado trabalham isoladamente. Como a carga ($\frac{q}{2}$) em uma chapa não passa pelo seu respectivo centro de cisalhamento (fig.35a), existe um momento de torção na chapa com valor $\frac{mq}{2}$. Essa torção é equivalente ao binário constituído pelas forças T (tração) e C (compressão), como vemos na fig.35 b) e c). Essa força T pode ser escrita por :

$$T = \frac{mq}{2a} \dots\dots\dots (114)$$



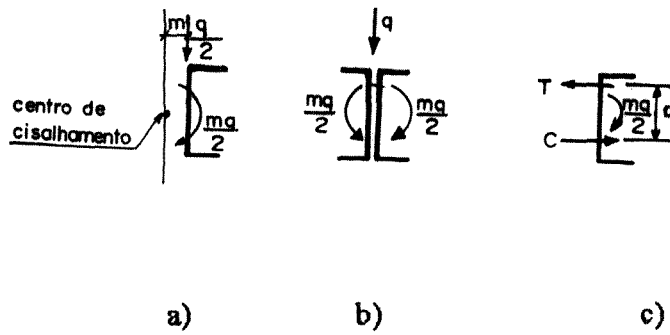


Figura 35 Esforço de tração na ligação

Fonte WILLIAMS e HARRIS ^[39] página 365

Onde :

m = distância entre o centro de cisalhamento do perfil de chapa

dobrada enrijecida e o plano médio da alma ;

q = carregamento fictício , suposto uniformemente distribuído ao longo da viga ;

a = distância vertical entre as linhas de conectores .

Ao admitirmos que o parafuso está posicionado a uma certa distância “e” longitudinalmente, encontramos a carga por parafuso que submete-o a tração ou compressão , ou seja :

$$T_s = \frac{mqe}{2a} \dots\dots\dots (115)$$

Onde T_c deve ser a força admissível à tração ou compressão de cada conector. Esta equação , (115) , é mencionada também por MALITE^[24] .

A norma AISI (American Iron and Steel Institute) apud MALITE^[24] tece algumas considerações muito importantes para elementos fletidos com seção transversal formados por dois perfis “U”, soldados ou parafusados localizados em ambas as mesas . Coloca que o máximo espaçamento entre pontos de conexão é extraído através da expressão (115) , e não deve ultrapassar o seguinte limite :

$$e_{max} = \frac{L}{6} (116)$$

Onde L é o vão da viga em questão .

A carga q mencionada nas equações (114) e (115) é uma carga fictícia suposta uniformemente distribuída . Para determinar o valor da carga a ser utilizada devemos levar em conta o tipo de carregamento da viga .

Para força uniformemente distribuída (p) , o carregamento fictício será :

$$q = 3p (117)$$

Comenta , ainda , o autor , que essa majoração (3x) leva em consideração prováveis carregamentos desiguais (não uniformes) nos dois perfis . Nos parece um pouco exagerada essa majoração para a utilização em vigas mistas .

Para carga concentrada ou reação de apoio, q é a carga dividida pelo comprimento do apoio ou extensão da aplicação da força concentrada . Se o comprimento for menor que o espaçamento dos conectores devemos utilizar a equação (114) substituindo - se o valor q pela carga concentrada P , pois estamos considerando que a carga está diretamente sobre a ligação .

Essas mesmas considerações são feitas por YU^[40] . Além disto, este pesquisador exemplifica este fato utilizando as ligações próximas da mesa , como mostra a fig. 36.



Figura 36 Posição das ligações de uma viga de chapa dobrada

Fonte YU^[40] página 331 .

Convém salientar que a maneira ideal para a disposição dos parafusos, nas ligações, é aquela onde os parafusos estão alocados em forma de zig-zag , pois nesta situação temos menor possibilidade da chapa romper por cisalhamento .

8 EXPERIMENTAÇÃO REALIZADA E RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo vamos descrever a parte experimental de nosso trabalho procurando verificar se os resultados obtidos nesta etapa estão coerentes com a parte teórica do trabalho.

Os materiais que envolvem a viga mista de aço e madeira , possuem suas características próprias , e a investigação se torna mais adequada quando tratamos cada um de maneira isolada, ou seja , determinando seus respectivos módulos de elasticidade e demais propriedades que se fizerem necessárias .

8.1 CHAPA DE AÇO

A obtenção dos dados inerentes à chapa se fizeram necessários, uma vez que a pesquisa junto aos fabricantes das vigas mistas evidenciou que não existe nenhuma informação a respeito da chapa de aço empregada na fabricação das peças.

O aço normalmente apresenta resultados bastante uniformes, por isso , de uma maneira geral , seu módulo de elasticidade (E) é conhecido e vale 210.000 Mpa . Entretanto, a investigação se fez necessária pelos motivos expostos anteriormente .

O ensaio para a determinação do “E” foi o de tração simples para a chapa . Nesse tipo de ensaio foi utilizada uma máquina universal de ensaio HECKERT com capacidade de aproximadamente 200 kN como mostra a fig. 37 .

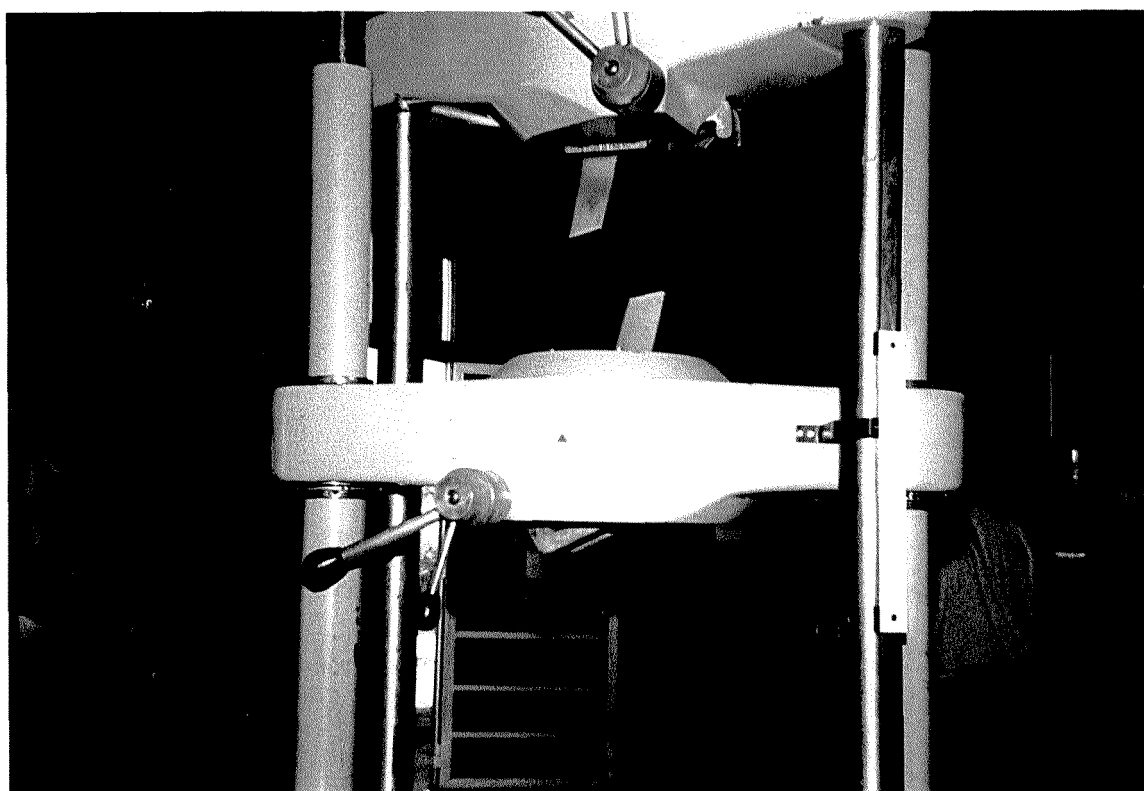


Figura 37 Foto do ensaio da chapa no momento da ruptura .

Os deslocamentos foram medidos através de relógios comparadores com precisão de centésimos de milímetro .

Os corpos de provas utilizados neste ensaio foram em número de 3 (três) , contendo as seguintes dimensões : 5 cm de largura , 40 cm de comprimento e 0,265 cm de espessura . A partir dos resultados obtidos foi tomada a média aritmética das 3 (três) verificações e feito o gráfico apresentado na fig. 38 .

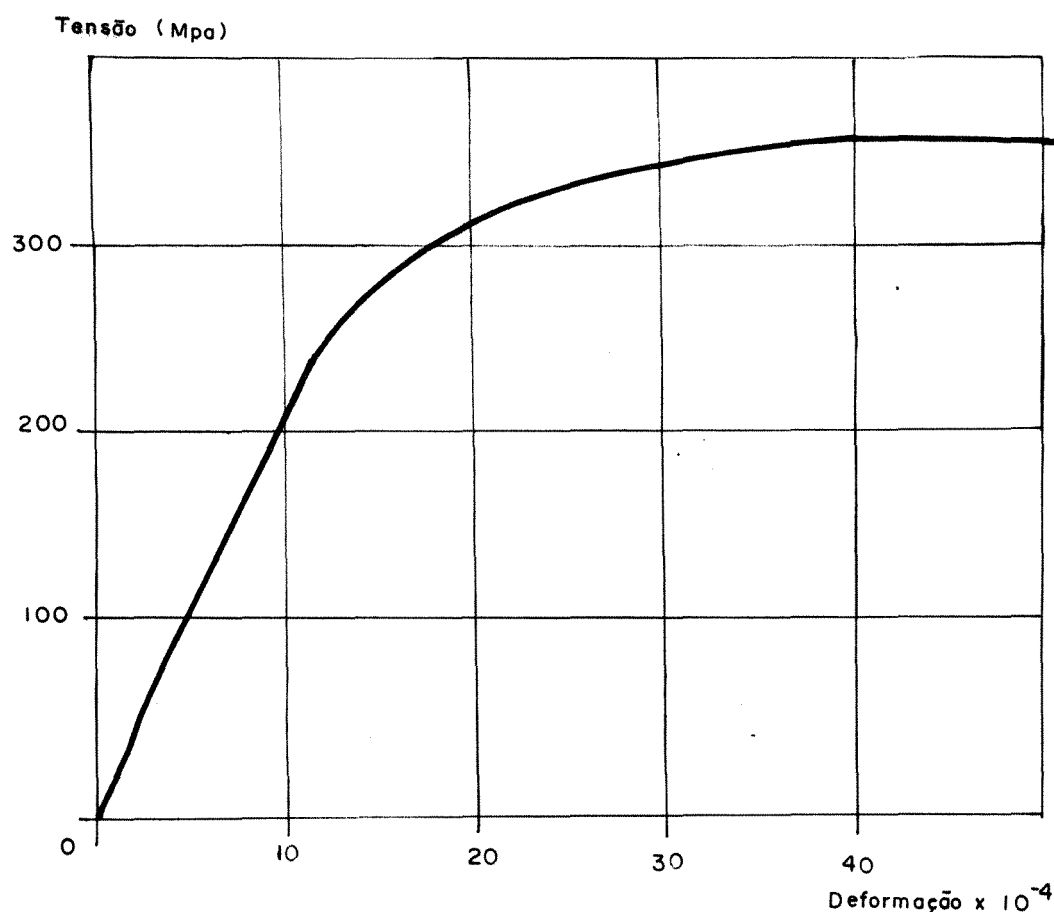


Figura 38 Diagrama tensão x deformação da chapa de aço .

As informações que destacamos como as mais importantes deste gráfico foram :

$$f_y = 237,74 \text{ Mpa (tensão de escoamento) ;}$$

$$f_{rup} = 362,26 \text{ Mpa (tensão de ruptura) ;}$$

$$E = 217.005 \text{ Mpa .}$$

Estes resultados estão muito próximos daqueles encontrados na literatura em geral para o aço .

Analisando a curva do gráfico tensão x deformação da figura 38 , podemos verificar ainda , que o aço empregado é da classe B , pois seu patamar de escoamento não está bem definido.

8.2 MADEIRA SERRADA

De acordo com o capítulo 4 , é necessário o conhecimento do valor do módulo de elasticidade longitudinal da madeira na determinação da rigidez da seção transformada .

Para se obter esse valor , foram utilizados a mesma prensa descrita no ensaio da chapa metálica e relógios comparadores para a leitura dos deslocamentos .

O ensaio empregado foi o de compressão paralela às fibras, visto que , geralmente , o módulo de elasticidade da madeira na compressão é menor do que na tração .

Foram selecionados 3 corpos de provas , extraídos de alguns protótipos da viga mista, sendo que as dimensões dos corpos de prova foram : 10 cm de largura , 20 cm de comprimento e 5 cm de espessura. Para a obtenção dessas dimensões foi necessário o uso de madeira colada , conforme mostra a fig. 39 , porque a espessura da madeira disponível era de 2,5 cm . Na fig. 40 mostramos um desses ensaios efetuados na madeira .

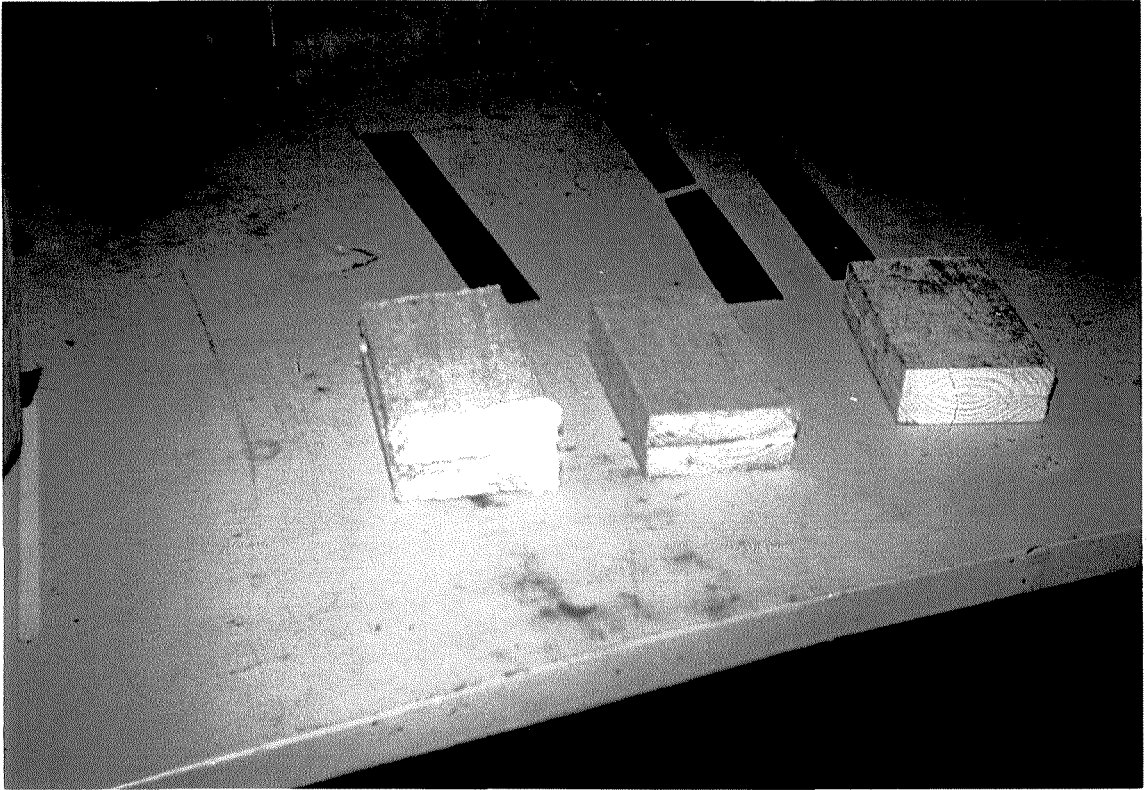


Figura 39 Foto dos corpos de provas utilizados^D

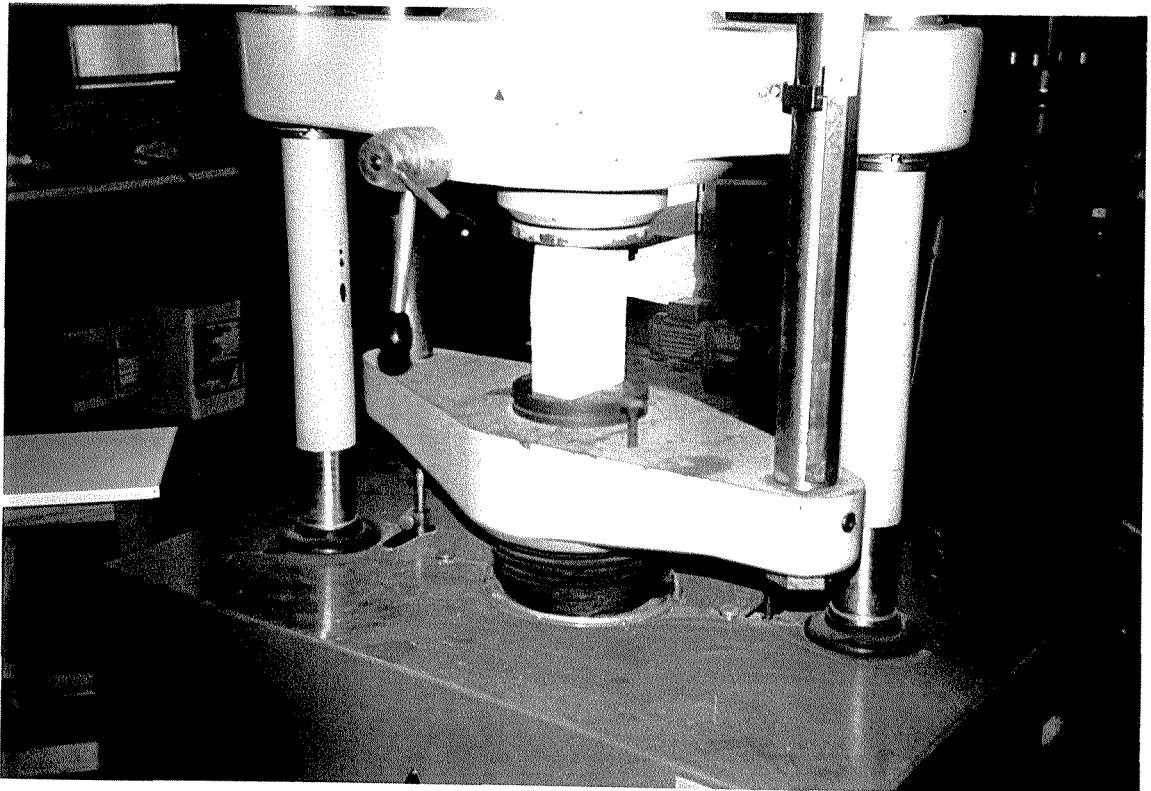


Figura 40 Foto de um corpo de prova em madeira no momento da ruptura

^D Na fig. 39, em primeiro plano , vemos os corpos de provas em madeira e , em segundo plano as chapas de

A madeira ensaiada é provavelmente da espécie “pinus oocarpa “ e foi verificada pelo LaMEM (Laboratório de madeira e Estruturas de Madeiras) , em São Carlos -SP .

Dos resultados obtidos nesse ensaio fizemos a média das 3 três verificações e traçamos o diagrama tensão x deformação correspondente , como mostra a fig. 41 .

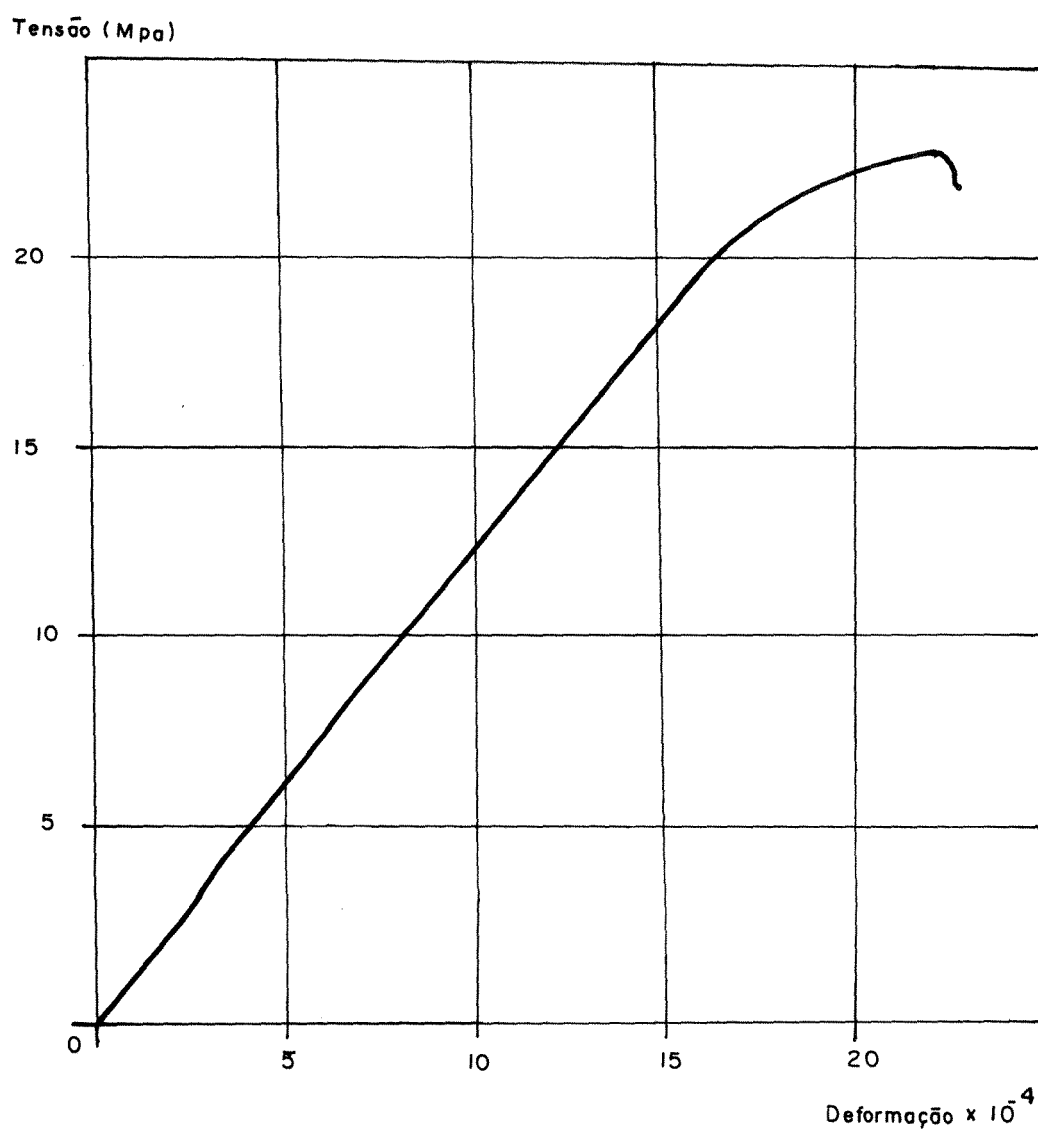


Figura 41 Diagrama tensão - deformação para a madeira empregada .

Constatamos o seguinte resultado do gráfico da fig. 41 :

$$E = 11.428 \text{ Mpa} .$$

As outras informações obtidas nesse experimento foram :

O limite de proporcionalidade da madeira ;

$$f_y = 19,05 \text{ Mpa} .$$

Tensão de ruptura.

$$f_{rup} = 23,43 \text{ Mpa}$$

8.3 ENSAIOS DE FLEXÃO NA VIGA MISTA

Inicialmente procuramos verificar o comportamento da viga mista avaliando a diferença entre a viga com madeira e sem madeira, com os parafusos alinhados na alma como proposto pelo fabricante. Nessa fase foram feitos ensaios de flexão em vigas com madeira em toda a extensão, e outra série sem madeira. As ligações tinham 2 (dois) parafusos com diâmetro nominal de 10 (dez) mm, e estavam alinhados na alma a cada 1,20m na parte central, de acordo com recomendações do fabricante. O comprimento de cada protótipo foi de 1,50 m e a seção transversal mostrada na fig. 20 b). Essas vigas são denominadas pelo fabricante de vigas secundárias e podem ser vistas nas fig. 42 e 43 respectivamente.

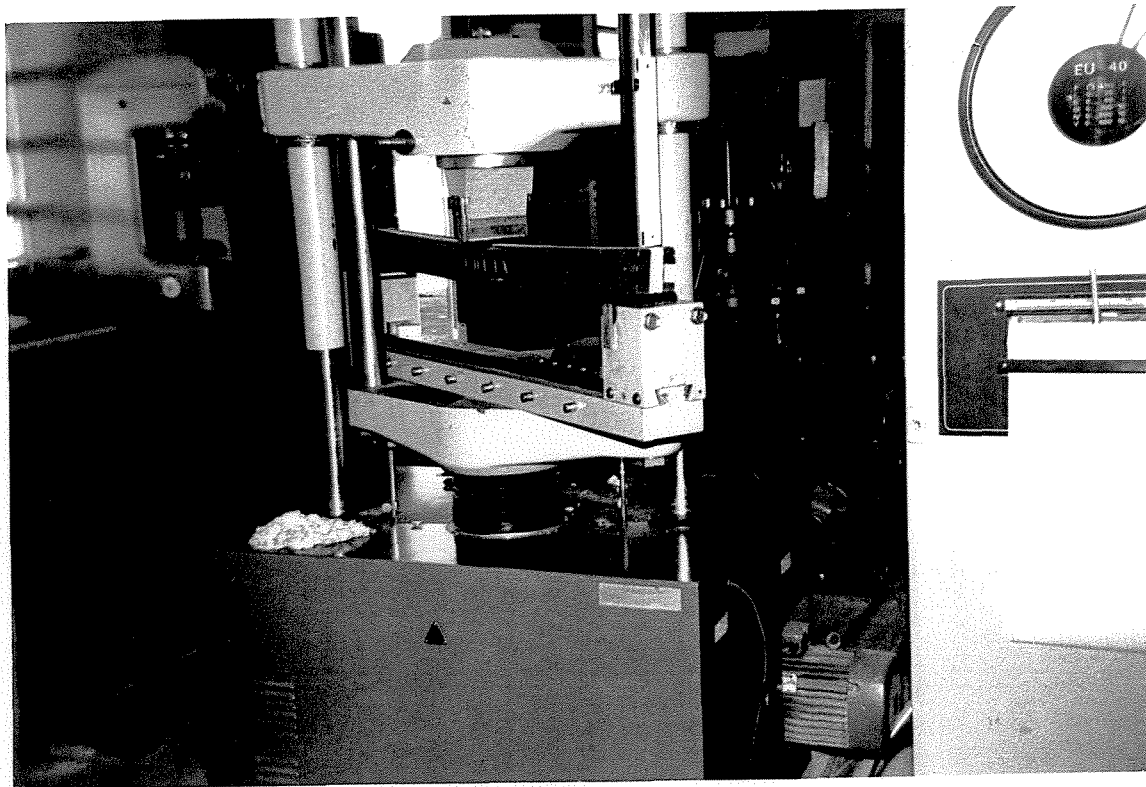


Figura 42 Foto de uma viga com 1,50 m de comprimento e madeira contínua na viga em sua fase de ensaio.

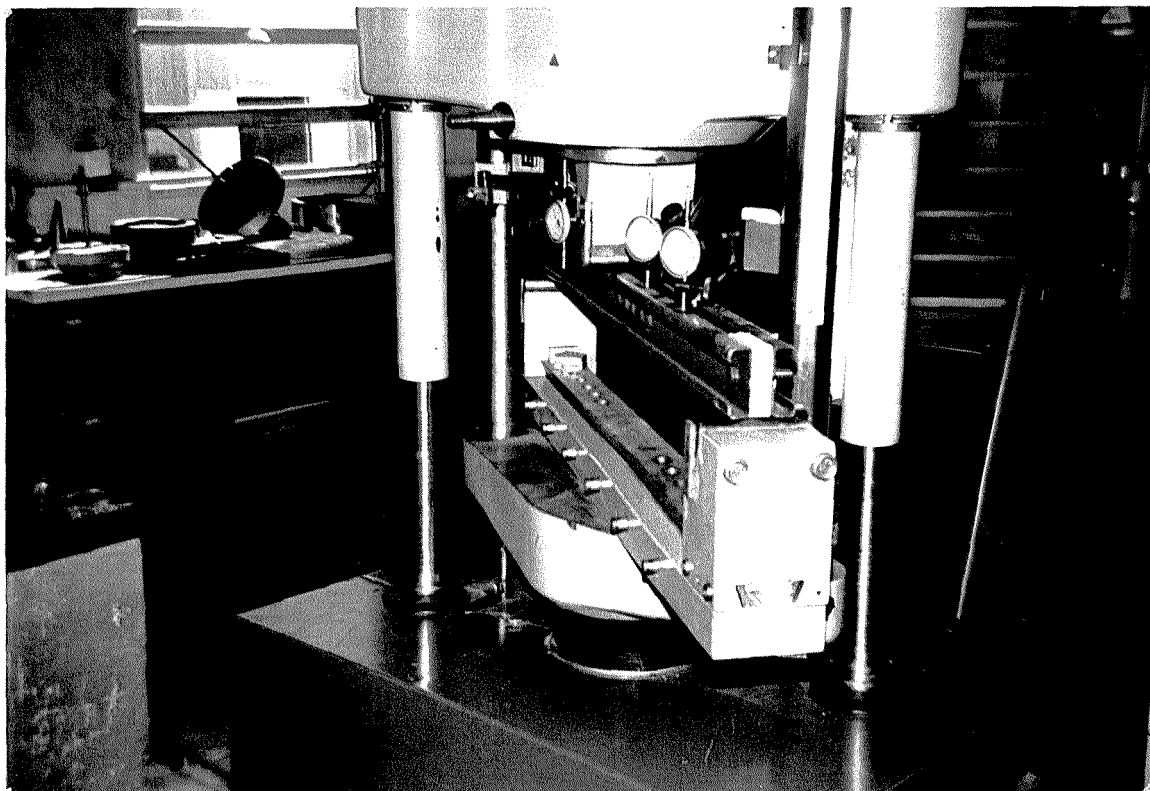


Figura 43 Foto de uma viga com 1,50 m de comprimento sem madeira contínua na viga em fase final de ensaio .

Nos ensaios observamos que a seção transversal com a madeira tem melhor eficiência do que a seção sem madeira , e a carga de ruptura da viga ocorre com ganho de 18% para a peça com madeira .

Após essa constatação passamos a analisar a interferência da disposição das ligações no comportamento da viga mista , procurando a maneira mais adequada para distribuir os parafusos , de acordo com a teoria apresentada no capítulo 7.

8.3.1 **MODELO COM 3 PARAFUSOS DE DIÂMETRO 12,7 mm ALINHADOS NA ALMA .**

A partir dos modelos encontrados comercialmente , optamos pelo protótipo de 2,50m de comprimento , com 11 cm de altura e seção transversal mostrada na fig. 20 a) , sendo que este tipo de viga é denominada pelo fabricante de viga principal do cimbramento metálico. Na fig. 44 , apresentamos os elementos que compõem a peça utilizada pela empresa fabricante das vigas mistas .

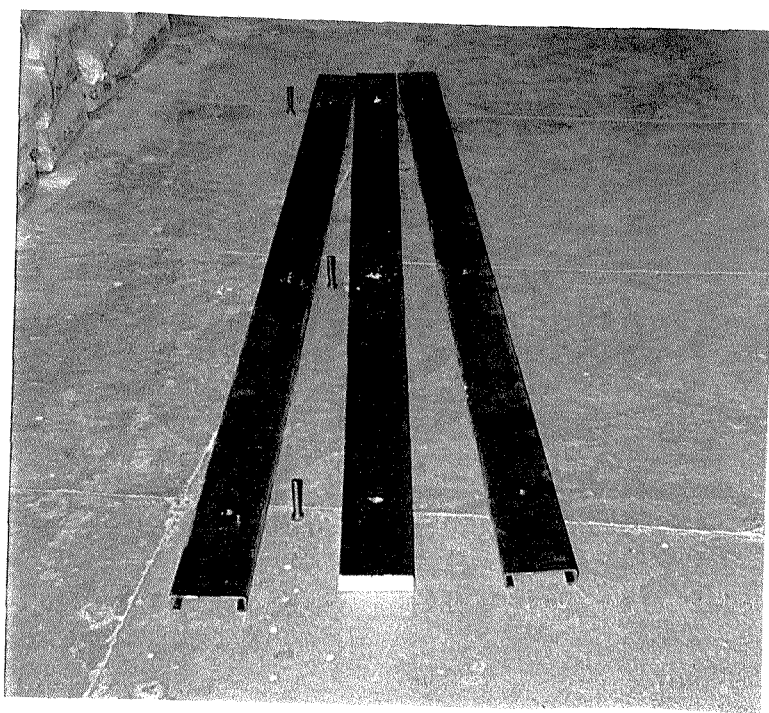


Figura 44 Foto dos elementos da viga e os respectivos parafusos

A solidarização é feita com 3 (três) parafusos de diâmetro 12,7 mm , e distância entre eles de 1,15 metros , alinhados na alma da viga mista . Ressaltamos que essas especificações são recomendadas pela empresa fabricante .

Para execução do ensaio de flexão da viga mista foi utilizado um pórtico com capacidade de carga de 400 kN aproximadamente , conforme fig. 45 .

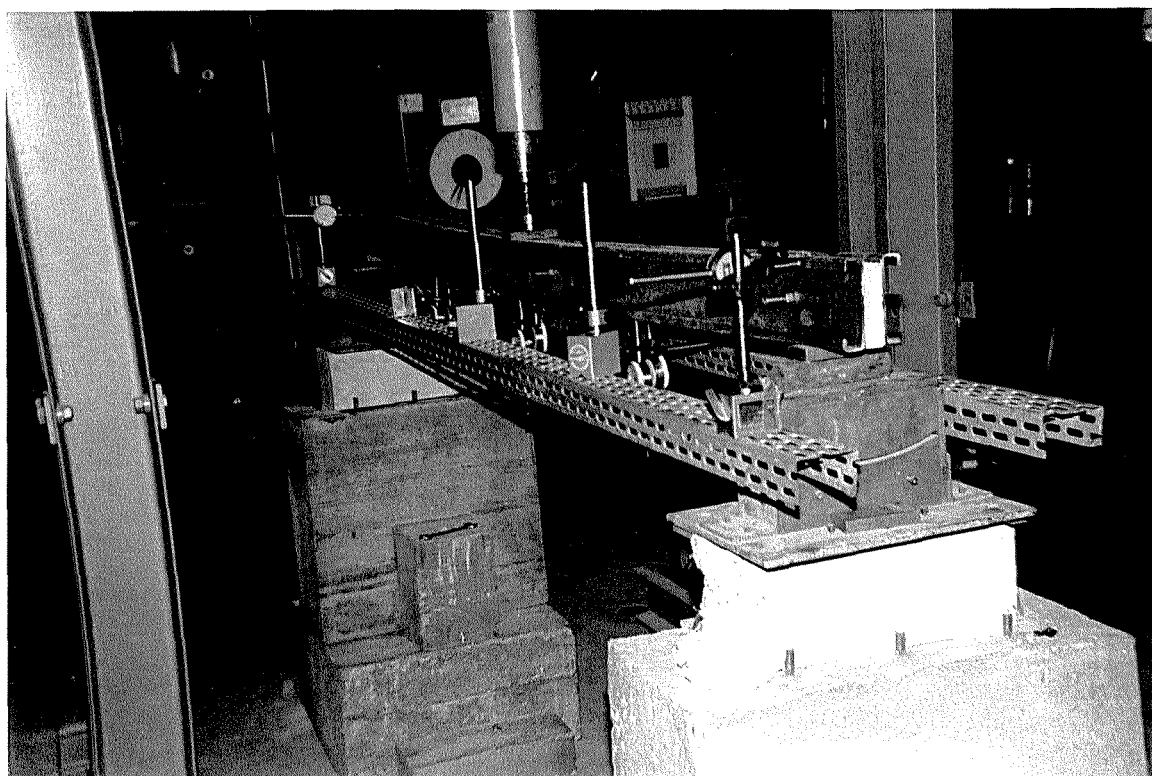


Figura 45 Foto do pórtico de carga aplicada à viga mista com 3 parafusos no momento do carregamento

A disposição dos parafusos fornecida pelo fabricante obedeceu aquela apresentada na fig. 46 .

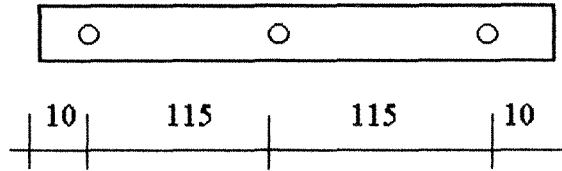


Figura 46 Vista longitudinal da disposição dos parafusos na viga mista

A determinação dos deslocamentos foi feita utilizando relógios comparadores sob a viga , conforme mostra a fig. 47.

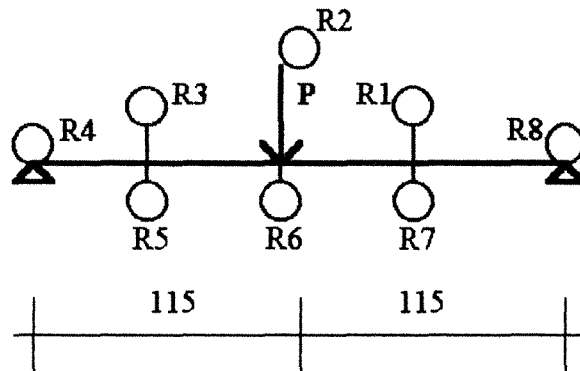


Figura 47 Disposição longitudinal dos relógios comparadores

Os relógios , representados pela letra R , que estão acima do eixo da viga no desenho, foram posicionados sob a madeira (R1 , R2 , R3) , enquanto que os inferiores (R5, R6 , R7) estão sob a chapa de aço . O furo para passagem do parafuso foi 16,0 mm . A

distância entre os relógios foi de 57,5 cm e os relógios R4 e R8 estão posicionados na lateral da viga , para a observação de um possível giro nos apoios .

Os resultados obtidos a partir do ensaio de flexão de 2 (dois) protótipos , tomadas a média aritmética , e relacionados na tabela 4 .

CARGA (kN)	R1 (mm)	R2 (mm)	R3 (mm)	R4 (mm)	R5 (mm)	R6 (mm)	R7 (mm)	R8 (mm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2,32	3,17	2,22	0,41	2,31	3,37	2,00	0,33
4	3,26	5,09	3,54	0,44	3,43	5,06	3,76	0,56
6	5,09	7,99	5,50	0,62	5,50	8,11	5,96	0,80
8	6,44	10,00	6,89	0,62	6,88	10,13	7,35	0,89
10	7,44	11,62	7,96	0,60	7,95	11,74	8,42	0,87

Tabela 4 Resultados obtidos de ensaios da viga com 3 (três) parafusos de diâmetro 12,7 mm alinhados na alma recomendados pelo fabricante .

A partir dos resultados obtidos na tabela 4 podemos analisar os deslocamentos verticais através de :

$$v_1 = \frac{1}{E_x I_z} \left(\frac{P \ell_1 x^3}{6\ell} - \frac{P x^3}{6} + \frac{P \ell_1 \ell x}{3} + \frac{P \ell_1^3 x}{6\ell} - \frac{P \ell_1^2 x}{2} \right) + \frac{c}{4G_{xy} A} \left(-\frac{P \ell_1}{\ell} x + P x \right) \quad (118)$$

$$v_2 = \frac{1}{E_x I_z} \left(\frac{P \ell_1 x^3}{6\ell} - \frac{P \ell_1 x^2}{2} + \frac{P \ell_1 \ell x}{3} + \frac{P \ell_1^3 x}{6\ell} - \frac{P \ell_1^3}{6} \right) + \frac{c}{4G_{xy} A} \left(-\frac{P \ell_1}{\ell} x + P \ell_1 \right) \quad (119)$$

Onde:

v_1 = linha elástica para o intervalo $0 \leq x \leq \ell_1$

v_2 = linha elástica para o intervalo $\ell_1 \leq x \leq \ell$

P = carga aplicada ;

ℓ = vão entre apoios da viga (230 cm) ;

ℓ_1 = ponto de aplicação da carga concentrada ;

x = um ponto qualquer da viga no intervalo;

$E_x I_z$ = rigidez da barra calculada pela expressão (53) ;

$G_{xy} A$ = rigidez transversal calculada pela expressão (52) ;

c = fator de forma calculado no item 5.4 , fig. 20a) , e vale 1,23 .

A rigidez da barra (EI) foi calculada pela expressão (53) , utilizando os resultados encontrados nos ensaios mencionados nos itens 8.1 e 8.2 e as características geométricas da fig. 20 a) ,ou seja:

$$E_s = 217.005 \text{ Mpa} ;$$

$$E_w = 11.428 \text{ Mpa} ;$$

$$I_s = 155,13 \text{ cm}^4 ;$$

$$I_w = 277,29 \text{ cm}^4 ;$$

$$A_s = 9,51 \text{ cm}^2 ;$$

$$A_w = 27,50 \text{ cm}^2 ;$$

$$n_w = \frac{E_w}{E_s} = 0,053 .$$

Assim sendo , a rigidez da barra tem o seguinte valor :

$$E_x I_z = 3.685.317 \text{ kN} \cdot \text{cm}^2$$

A rigidez transversal da barra ($G_{xy} A$) é calculada através da expressão (52) com os seguintes valores:

$G_s = 0,385 E_s$ (De acordo com a NBR 8800/1986^[6] para o aço);
 $G_w = 0,10 E_w$ (Valor estimado para a madeira → referência MASCIA ^[27]);
 $A_s = 9,51 \text{ cm}^2$;
 $A_w = 27,50 \text{ cm}^2$;
 $A = 9,51 + (0,053 \times 27,50) = 10,97 \text{ cm}^2$

A rigidez transversal da viga mista vale :

$G_{xy} A = 79.618 \text{ kN} . \text{ cm}^2$

Assim , considerando a seção transformada , podemos calcular os valores dos deslocamentos verticais para os relógios R1 , R2 , R3 , R5 , R6 e R7 , utilizando as expressões (118) e (119) , e estão indicados na tabela 5 .

CARGA (kN)	R1 (mm)	R2 (mm)	R3 (mm)	R5 (mm)	R6 (mm)	R7 (mm)
0	0	0	0	0	0	0
2	0,95	1,38	0,95	0,95	1,38	0,95
4	1,91	2,77	1,91	1,91	2,77	1,91
6	2,86	4,15	2,86	2,86	4,15	2,86
8	3,82	5,54	3,82	3,82	5,54	3,82
10	4,77	6,92	4,77	4,77	6,92	4,77

Tabela 5 dados teóricos obtidos através do método da seção transformada .

Segue na fig. 48 , os gráficos da tabela 4 relativos a parte experimental (representado pela curva B) e teórico (representado pela curva A) , para o carregamento de 10 kN .

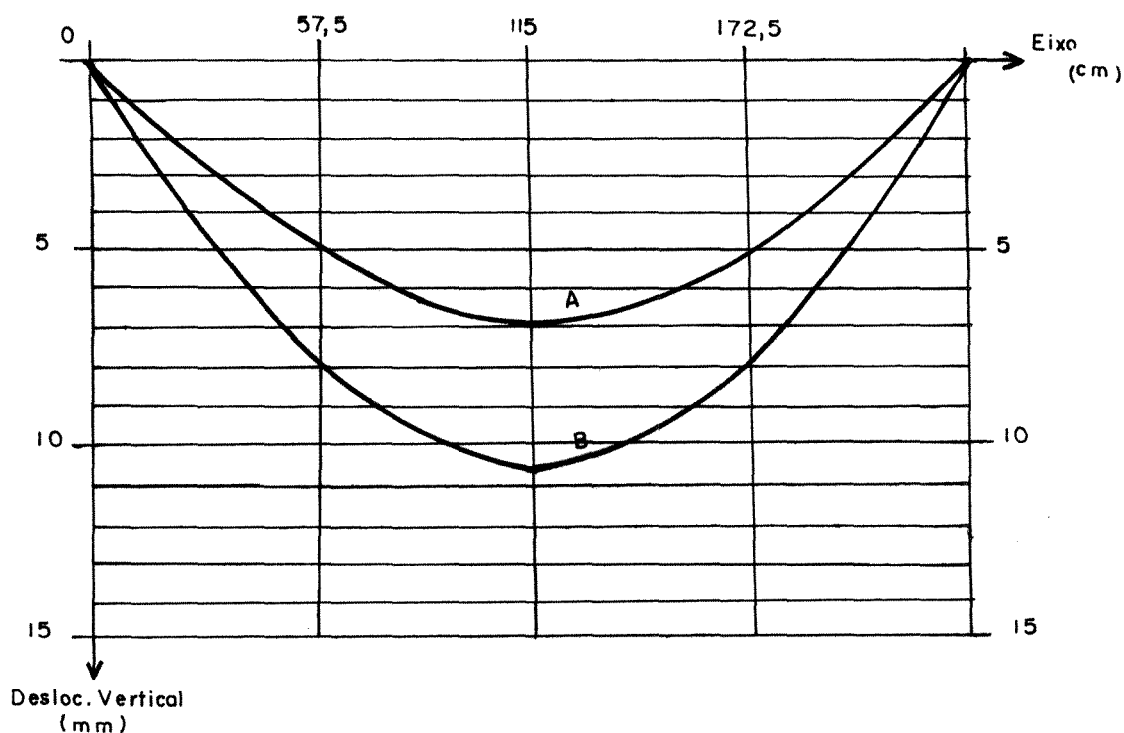


Figura 48 Diagrama dos deslocamentos verticais teórico (curva A) e experimental (curva B) para a carga de 10 kN da viga mista com 3 parafusos com diâmetro 12,7 mm alinhados na alma recomendados pelo fabricante.

A fig. 48 apresenta na curva B, o comportamento experimental, que apresentou deslocamento vertical cerca de 67 % maior que a curva teórica representada pela curva A.

Com referência aos parafusos empregados para a solidarização, verificamos que a relação: largura da madeira pelo diâmetro do parafuso é 1,98, sendo considerado como um parafuso rígido.

A peça foi submetida a um carregamento progressivo até sua ruína. A ruptura ocorreu com a flambagem da chapa por compressão, como mostra a fig. 49.

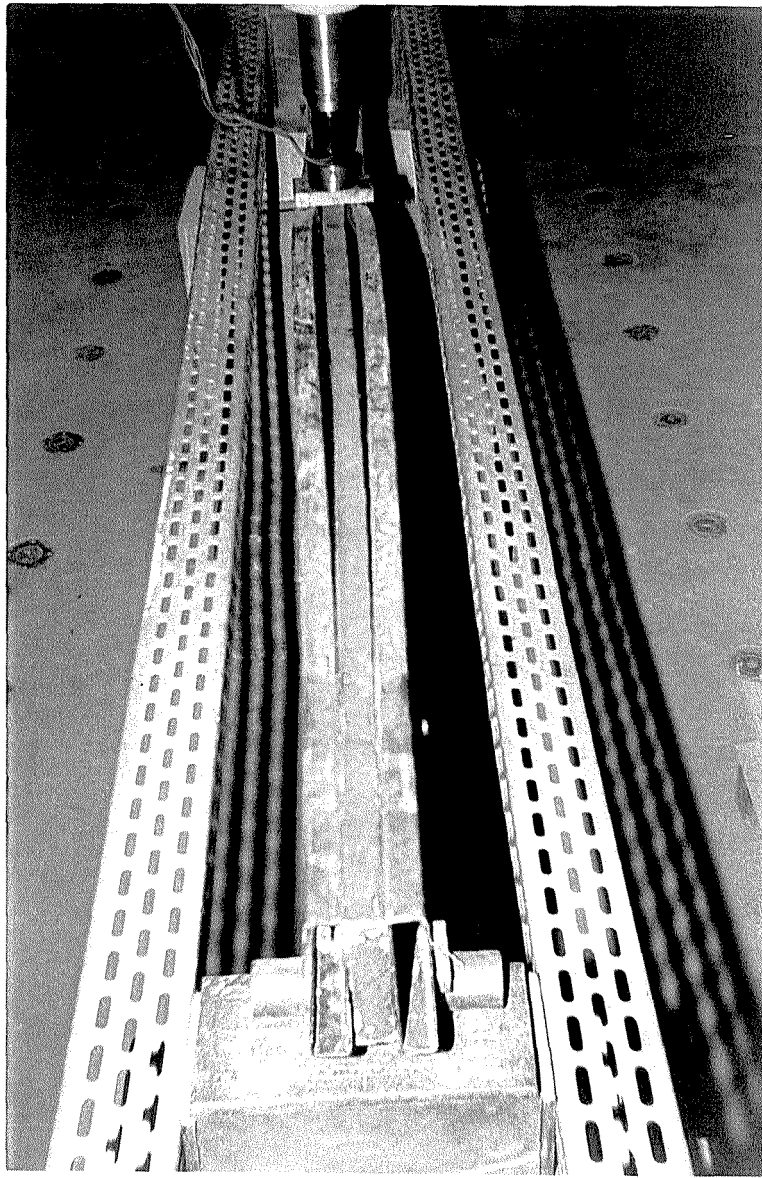


Figura 49 Foto da ruptura por flambagem da chapa da viga com 3 parafusos de 12,7 mm de diâmetro aplicados na alma , a cada 115 cm

A ruptura dessa viga ocorreu com uma carga de 16 kN

8.4 PROPOSTA DE ALTERAÇÃO DOS PARAFUSOS

No item 7.3 verificamos duas maneiras de estudarmos as ligações . Uma pelo fluxo de cisalhamento e a outra através da análise pelo centro de cisalhamento . Elaboramos alguns ensaios com o intuito de avaliarmos a eficiência das ligações calculadas e verificarmos qual dessas maneiras nos conduz a uma resposta mais eficiente para a flexão .

Foram utilizadas vigas mistas com a mesma seção transversal do ensaio anterior , ou seja fig. 20a), denominadas vigas principais do cimbramento metálico. O comprimento total das peças utilizadas nestes experimentos foi de 2,50 metros .

8.4.1 DIMENSIONAMENTO DOS PARAFUSOS ATRAVÉS DO FLUXO DE CISALHAMENTO E OS PARAFUSOS ALINHADOS NA ALMA

No dimensionamento dos parafusos da viga mista , mencionado no item 7.3.1, que leva em conta o fluxo de cisalhamento , necessitamos saber qual a carga máxima possível para a viga , de tal modo que nenhum dos materiais que compõem a peça , ou seja , o aço e a madeira atinjam um estado limite de utilização. Isso pode ser determinado , através da obtenção do deslocamento máximo na viga mista , sendo este valor relativo ao escoamento de um dos materiais que compõem a viga .

Este fato ocorre porque consideramos que os materiais sempre trabalham em regime elástico .

Para que essa condição seja verificada , vamos considerar os resultados encontrados nos experimentos para a chapa metálica(item 8.1) e para a madeira serrada (item 8.2) . Podemos então , sobrepor o diagrama tensão x deformação desses materiais , conforme mostra a fig. 50.

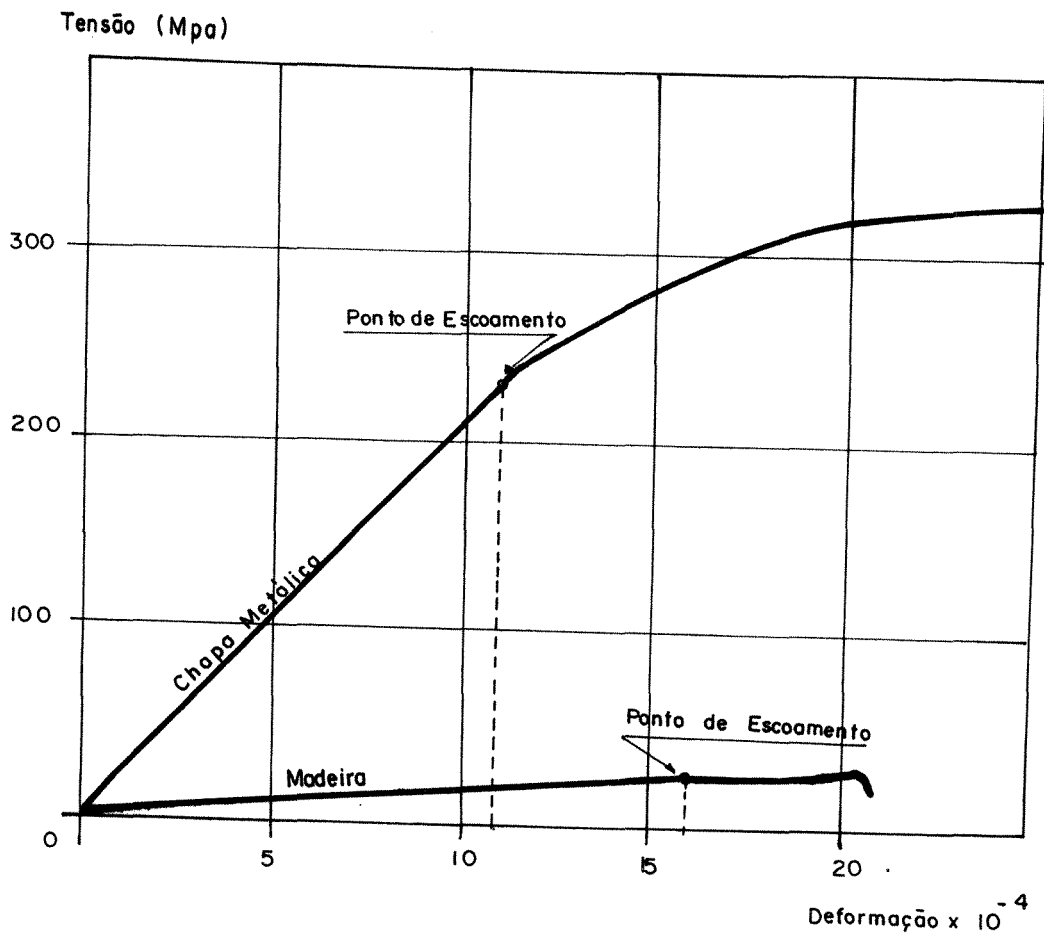


Figura 50 Sobreposição dos diagramas tensão x deformação da chapa metálica e da madeira serrada

A figura 49 mostra que a chapa entra em escoamento primeiro , com uma deformação $\epsilon = 1,10 \times 10^{-3}$, enquanto que a madeira tem escoamento com $\epsilon = 1,67 \times 10^{-3}$. Logo podemos convencionar que a deformação máxima de trabalho da viga mista será de $1,10 \times 10^{-3}$.

Através das expressões (40) e (55) , com os resultados experimentais dos itens 8.1 e 8.2 e a deformação máxima , determinamos a tensão máxima aplicável à viga mista transformada , que é a tensão de escoamento da chapa , ou seja :

$$\sigma_{x \text{ máx}} = 237,74 \text{ Mpa}$$

Utilizando-se as expressões (32) e (60) , e o valor de $\sigma_{x \text{ máx}}$ determinamos que :

$$M_{\text{máx}} = 733,67 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

Em todos os ensaios empregamos o esquema estático mostrado na fig. 16 , onde :

$$M_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{máx}} \ell_1 (\ell - \ell_1)}{\ell} \dots\dots\dots (120)$$

Substituindo o valor do momento máximo na expressão (120) , e sabendo que $\ell_1 = 115 \text{ cm}$ e $\ell = 230 \text{ cm}$ encontramos :

$$P_{\text{máx}} = 12,76 \text{ kN}$$

Assim , o dimensionamento pelo fluxo de cisalhamento pode ser calculado através das expressões (103) , (104) , (105) , (106) e (107). Portanto, determinamos a força de cisalhamento total sobre os parafusos como sendo :

$$F_{cis} = 166,88 \text{ kN}$$

Segundo a empresa fabricante do parafuso para as vigas mistas , a resistência à tração deste é de 525 Mpa (marca Marwanda com $\frac{1}{2} \times 2 \frac{1}{2}$ especificação A 307 SAE 1010 1020 carga admissível de 14190 lb.) , sendo que o seu diâmetro nominal é de 12,7 mm . Utilizando a expressão (91) , determinamos a força resistente ao cisalhamento de cada parafuso:

$$R_{dv} = 16,76 \text{ kN}$$

O número de parafusos para a solidarização da peça de acordo com a expressão (108) seria :

$$N = 4,98 \text{ parafusos} \Rightarrow 5 \text{ parafusos com diâmetro de } 12,7 \text{ mm}$$

Existe a possibilidade de alterar o diâmetro do parafuso para outro valor .Assim , podemos determinar a nova quantidade de parafusos . Se adotarmos o diâmetro de 6,0 mm , a força que resiste ao cisalhamento por parafuso , com as mesmas características anteriores e a equação (91) , temos o seguinte valor :

$$R_{dv} = 3,74 \text{ kN}$$

Portanto, através da equação(108) , o novo número de parafusos necessários para a solidarização da chapa metálica e da madeira serrada seria :

$$N = 22,31 \text{ parafusos} \Rightarrow 23 \text{ parafusos com diâmetro de } 6 \text{ mm}$$

8.4.2 DIMENSIONAMENTO DOS PARAFUSOS ATRAVÉS DO CENTRO DE CISALHAMENTO COM OS PARAFUSOS ALINHADOS PRÓXIMOS ÀS MESAS .

Como verificado no item 7.4.2 , para o dimensionamento dos parafusos próximos às mesas, em primeiro lugar devemos determinar o centro de cisalhamento para chapa metálica , calculado pela expressão (113) , ou seja :

$$m = 1,19 \text{ cm}$$

Sabendo-se que :

$$q = \frac{P_{\max}}{L} = \frac{12,76\text{kN}}{2,30\text{m}} = 5,55\text{kN/m}$$

Utilizando-se parafusos com 6 mm de diâmetro , tensão à tração de 525 Mpa, distância “a” entre linhas de parafusos 6 cm , podemos calcular o espaçamento “e” entre os conectores através da expressão (115) igual a:

$$e = 2696 \text{ cm}$$

Mas o espaçamento máximo entre conectores não pode ultrapassar a seguinte condição :

$$e_{\max} = \frac{L}{6} = \frac{230}{6} = 38,33 \text{ cm} \Rightarrow 38 \text{ cm}$$

Para a viga mista com vão de 230 cm de comprimento, o número de parafusos necessários vale :

$$N = \frac{250}{38} = 6,5 \Rightarrow 7 \text{ parafusos por alinhamento;}$$

Sabendo-se que teremos 2 linhas de parafusos , então haverá um total de 14 (quatorze) parafusos na viga .

Existe também a hipótese de se trabalhar com os parafusos em forma de zig- zag . É interessante considerar essa hipótese , uma vez que , desta forma , a possibilidade da chapa metálica da viga mista romper - se por cisalhamento torna - se mais difícil , como mencionado no final do capítulo 7 .

8.5 ENSAIO DO MODELO COM 5 (CINCO) PARAFUSOS DE DIÂMETRO 12,7 mm ALINHADOS NA ALMA

No item 8.4.1 , foi calculado o número de parafusos com diâmetro de 12,7 mm, necessários para a solidarização da viga mista , perfazendo um total de 5 (cinco), sendo que, nos ensaios das vigas , foram utilizados os mesmos equipamentos dos ensaios anteriores, ou seja , o pórtico e relógios comparadores .

O esquema do ensaio pode ser visto na fig. 51 , onde mostramos uma viga mista no momento do carregamento .

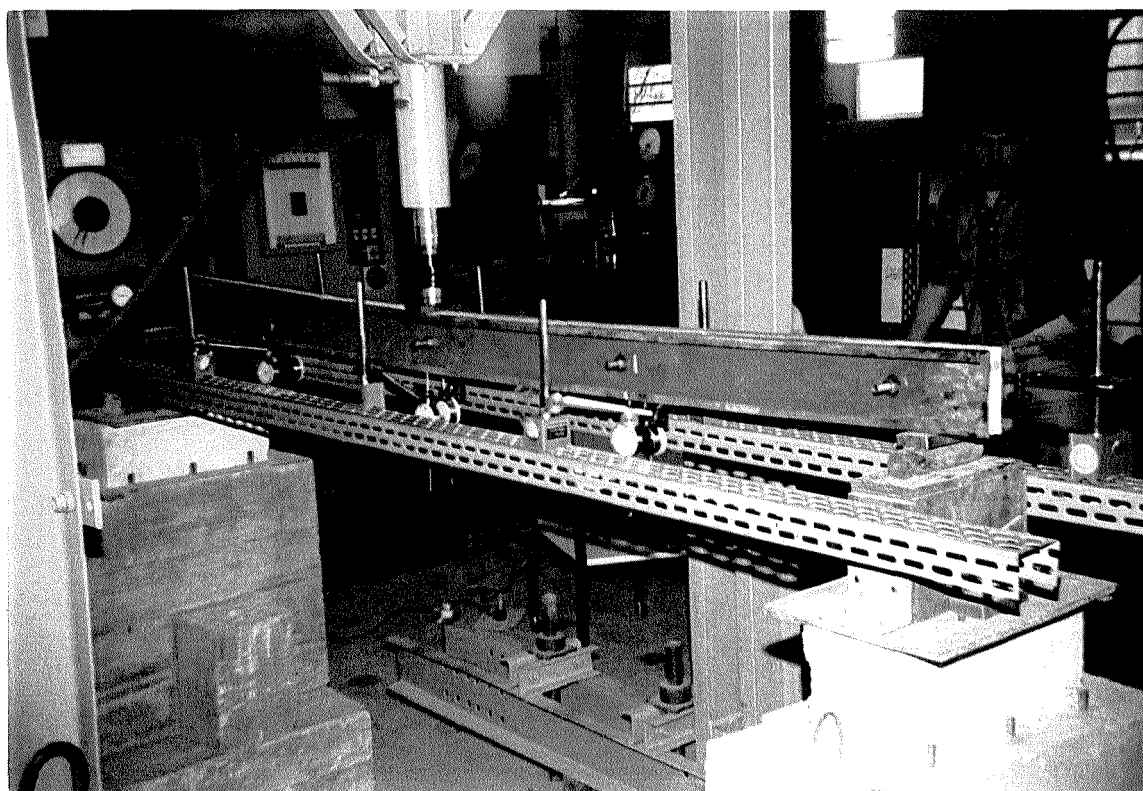


Figura 51 Foto do pórtico de carga aplicada à viga mista com 5 parafusos de diâmetro 12,7 mm alinhados na alma no momento do carregamento

A distribuição dos parafusos tiveram a seguinte forma :

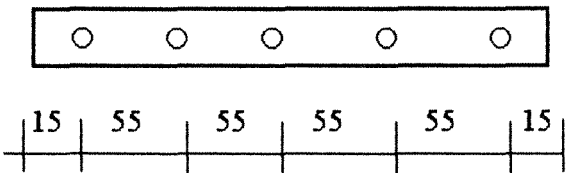


Figura 52 Vista longitudinal da disposição dos parafusos na viga mista com 5 parafusos de 12,7 mm alinhados na alma .

Segundo este modelo foram ensaiadas 2 peças , com os resultados apresentados na tabela 6 . A disposição dos relógios comparadores é a mesma apresentada na fig. 47.

CARGA (kN)	R1 (mm)	R2 (mm)	R3 (mm)	R4 (mm)	R5 (mm)	R6 (mm)	R7 (mm)	R8 (mm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,76	2,96	0,67	0,12	1,81	2,64	1,83	0,16
4	2,12	4,44	2,98	0,14	3,16	4,6	3,56	0,28
6	3,40	6,20	3,65	0,17	4,40	6,44	4,40	0,40
8	4,46	7,72	4,66	0,19	5,58	8,05	5,48	0,49
10	5,54	9,29	5,68	0,20	6,61	9,72	6,58	0,55

Tabela 6 Resultados extraídos de ensaios da viga com 5 (cinco) parafusos de diâmetro 12,7 mm alinhados na alma da viga mista.

Traçando o diagrama que quantifica o comportamento experimental de acordo com a tabela 6 (representado pela curva C) , para o carregamento de 10 kN, mostrado na fig. 53 e,

também comparando-o com o diagrama teórico da tabela 5 (representado pela curva A), temos :

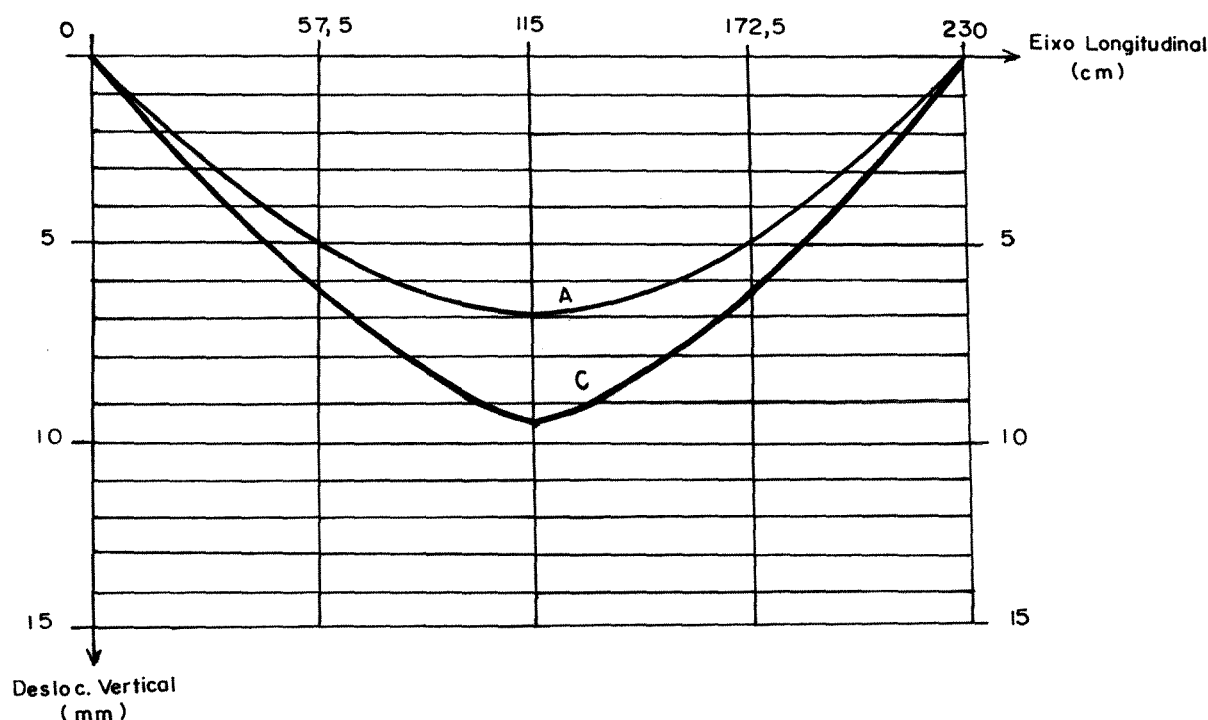


Figura 53 Diagrama do deslocamento vertical teórico (curva A) e experimental (curva C) para o carregamento de 10 kN da viga mista com 5 parafusos de 12,7 mm alinhados na alma .

Observando a curva C experimental da figura 53, constatamos que houve um deslocamento de aproximadamente 31 % maior que da curva teórica A. Entretanto, o desempenho desse modelo em relação ao caso do item 8.3.1 (viga com 3 parafusos recomendada pelo fabricante) foi muito melhor.

Os 5 parafusos empregados na viga mista são rígidos, pois a relação espessura da madeira pela largura do parafuso foi de 1,98.

Neste ensaio carregamos a viga até a ruptura , que se deu com 21 kN , e pode ser vista no seu momento da ruína na figura 54 .

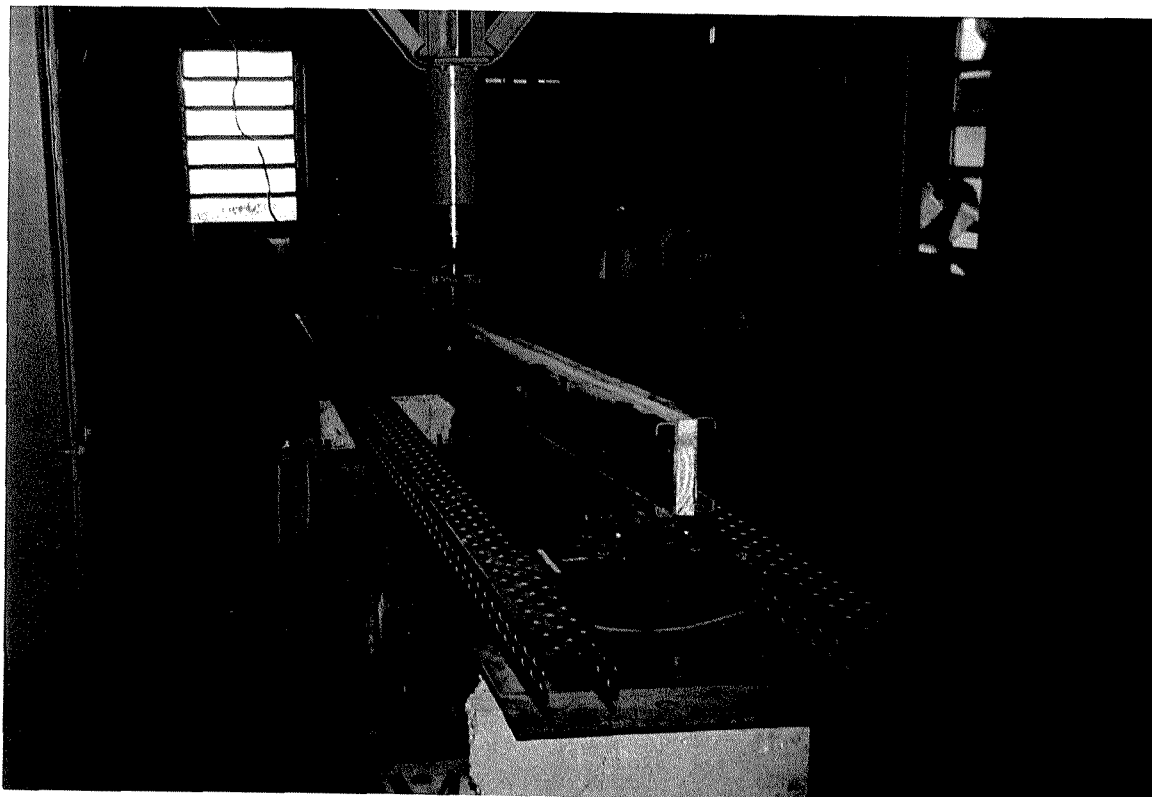


Figura 54 Foto da ruptura da viga com 5 parafusos de 12,7 mm na alma

Notamos neste experimento que a ruptura ocorreu com flambagem local da mesa .

**8.6 ENSAIO DO MODELO COM 23 (VINTE E TRÊS)
PARAFUSOS DE DIÂMETRO 6 mm ALINHADOS
NA ALMA**

O nosso objetivo neste ensaio será o de averiguar a diferença de comportamento entre 5 parafusos de diâmetro 12,7 mm (rígidos) , realizado anteriormente e os 23 parafusos de diâmetro 6 mm (flexíveis) , alinhados na alma .

A distribuição desses parafusos tiveram a seguinte forma :

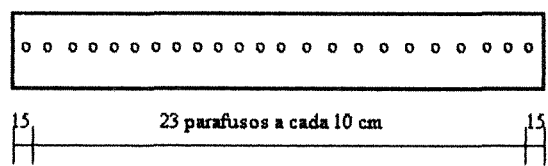


Figura. 55 Vista longitudinal da disposição dos parafusos na viga mista com 23 parafusos de 6 mm de diâmetro alinhados na alma .

Nesse ensaio foram utilizados os mesmos equipamentos do ensaio anterior , e a mesma seção transversal dos últimos ensaios . O experimento pode ser visto através da fig . 56 .

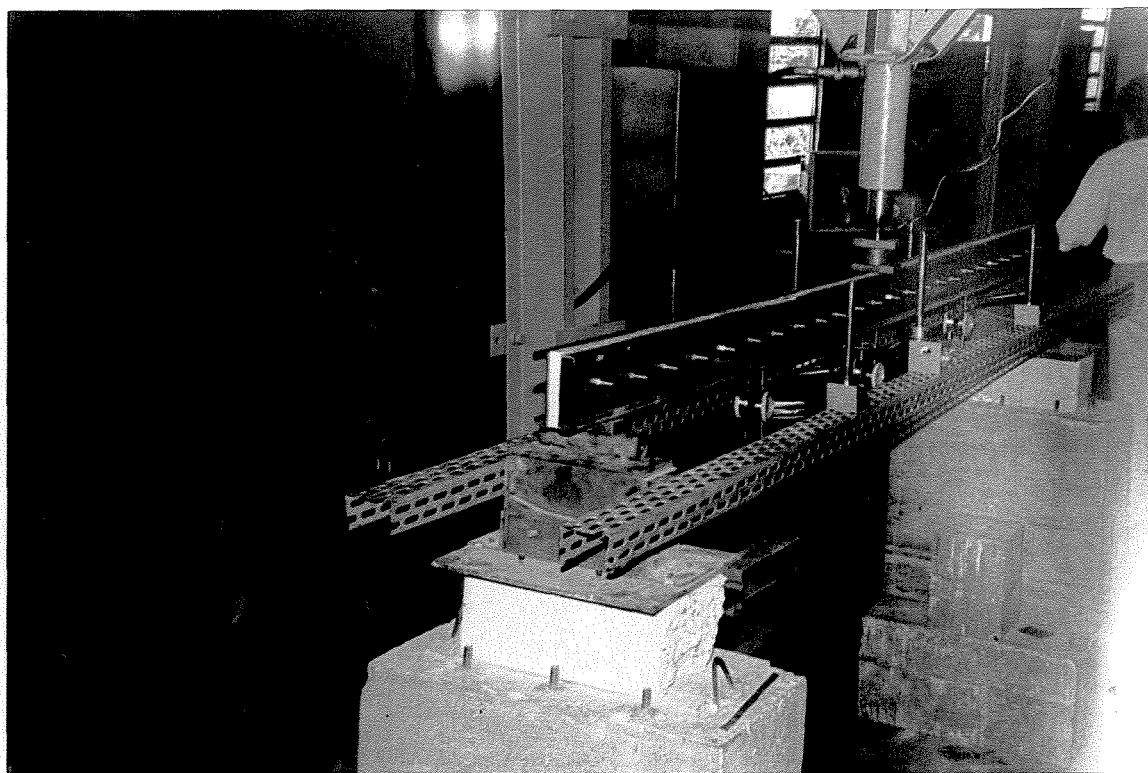


Fig. 56 Foto do pórtico de carga aplicada à viga mista com 23 parafusos de 6 mm alinhados na alma no momento do carregamento .

Segundo esse modelo foram ensaiadas 2 peças , e os resultados são apresentados na tabela 7 .

CARGA (kN)	R1 (mm)	R2 (mm)	R3 (mm)	R4 (mm)	R5 (mm)	R6 (mm)	R7 (mm)	R8 (mm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,74	1,04	0,70	0,10	0,70	1,06	0,75	0,08
4	1,69	2,33	1,55	0,19	1,58	2,36	1,66	0,14
6	2,75	3,80	2,53	0,32	2,63	3,91	2,72	0,23
8	3,89	5,44	3,72	0,46	3,72	5,46	3,76	0,25
10	5,26	7,40	4,93	0,55	4,91	7,23	4,95	0,26

Tabela 7 Resultados extraídos de ensaios da viga com 23 parafusos de diâmetro 6 mm alinhados na alma da viga mista.

Podemos agora, comparar o diagrama relativo ao comportamento experimental (representado pela curva D) mostrado na tabela 7 , para 10 kN , e diagrama com os resultados teóricos (representado pela curva A) mostrados na tabela 5 , vistos na fig. 57 .

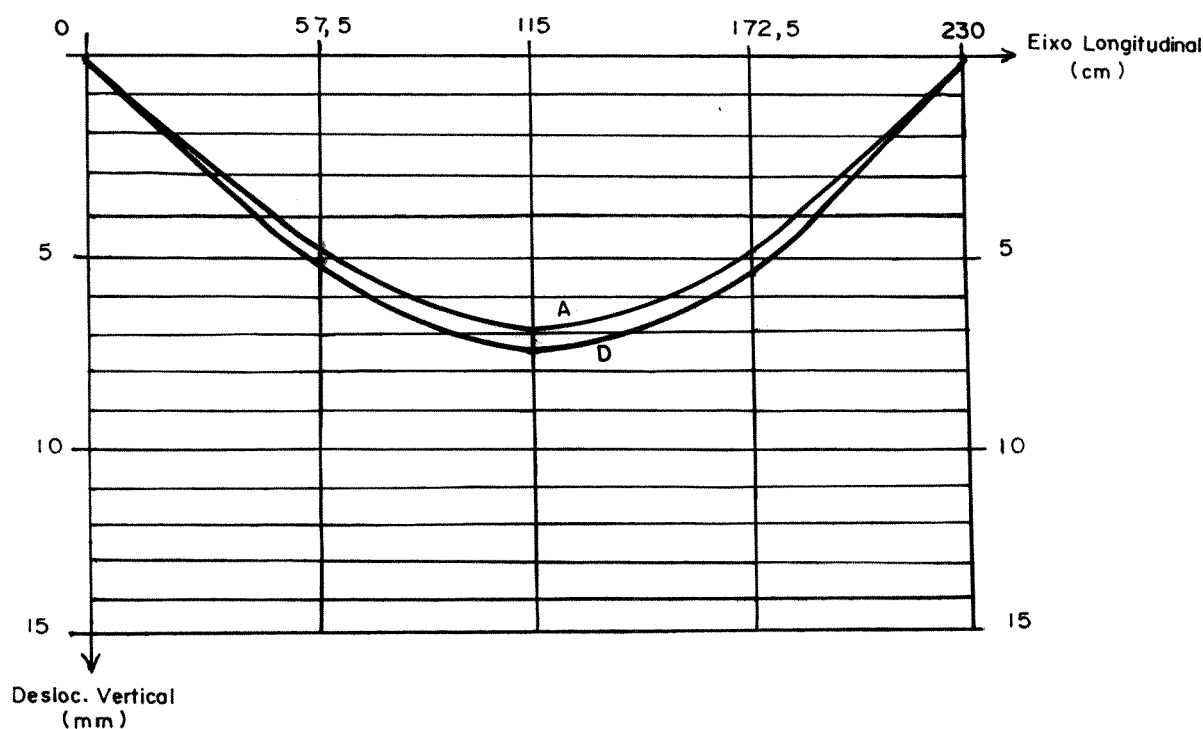


Figura 57 Diagrama dos deslocamentos verticais teórico (curva A) e experimental (curva D) para o carregamento de 10 kN para a viga contendo 23 parafusos de diâmetro 6 mm alinhados na alma.

A fig. 57 nos evidencia que a curva dos resultados experimentais (curva D), teve um deslocamento vertical com cerca de 5, 29 % maior que os resultados da curva A (curva teórica).

A relação largura da madeira pelo diâmetro do parafuso é de 4,2 . A literatura apresentada por AGOSTINI, CATTO e STAMATO^[2] , considera que se esta relação for menor do que 3 , o parafuso é considerado muito rígido , se maior do que 6 muito esbelto . Como podemos observar o parafuso nesse caso está numa posição intermediária .

A ruína da viga neste caso ocorreu com 23 kN , e se manifestou por instabilidade lateral, perdendo seu alinhamento longitudinal , podendo este ensaio ser visto através da fig. 58 .

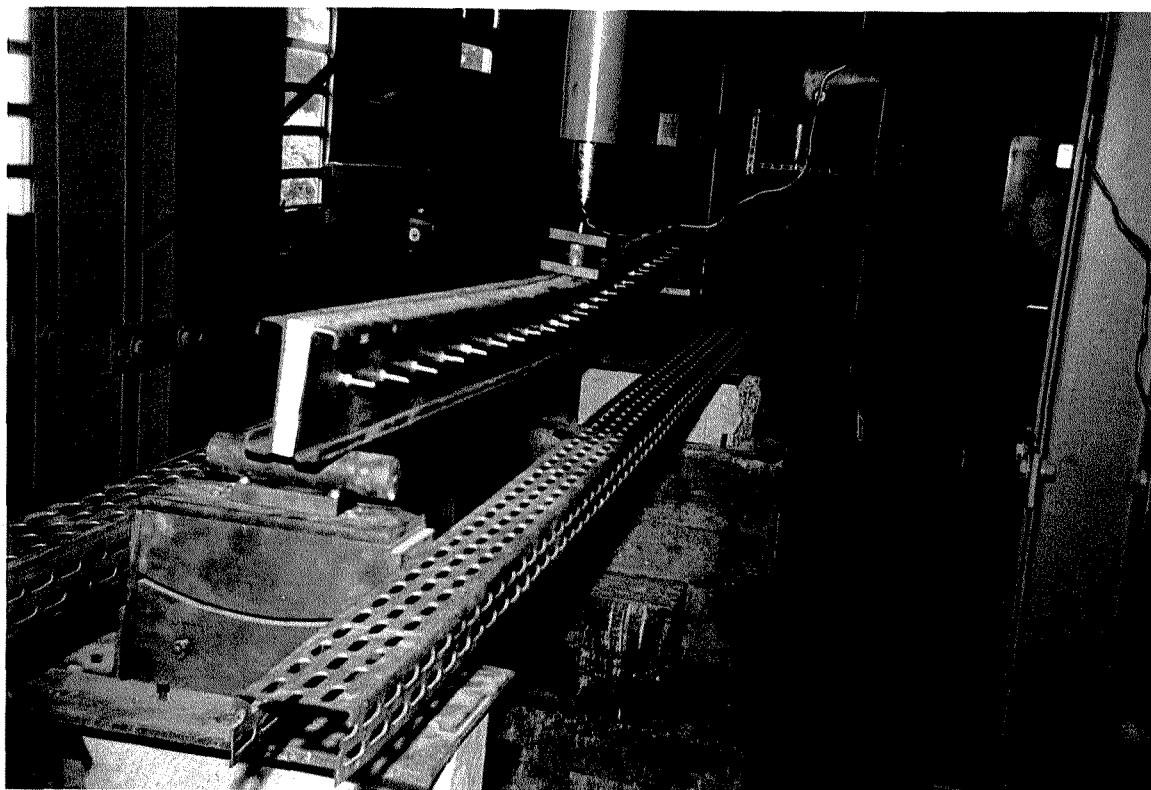


Figura 58 Foto de uma viga com 23 parafusos alinhados na alma no momento da ruptura

Comparando o comportamento da viga com 23 parafusos deste ensaio com aquele em que se usou 5 parafusos rígidos do item 8.5, observamos que houve uma sensível melhora no desempenho à flexão da viga , e que foi superior a 25 % . Esta constatação nos leva a afirmar que o uso espaçamentos pequenos entre parafusos nos fornece resultados mais satisfatórios para o caso das vigas mistas em chapa metálica e em madeira serrada . As peças após o ensaio podem ser vistas na figura 59 , quando da comparação .

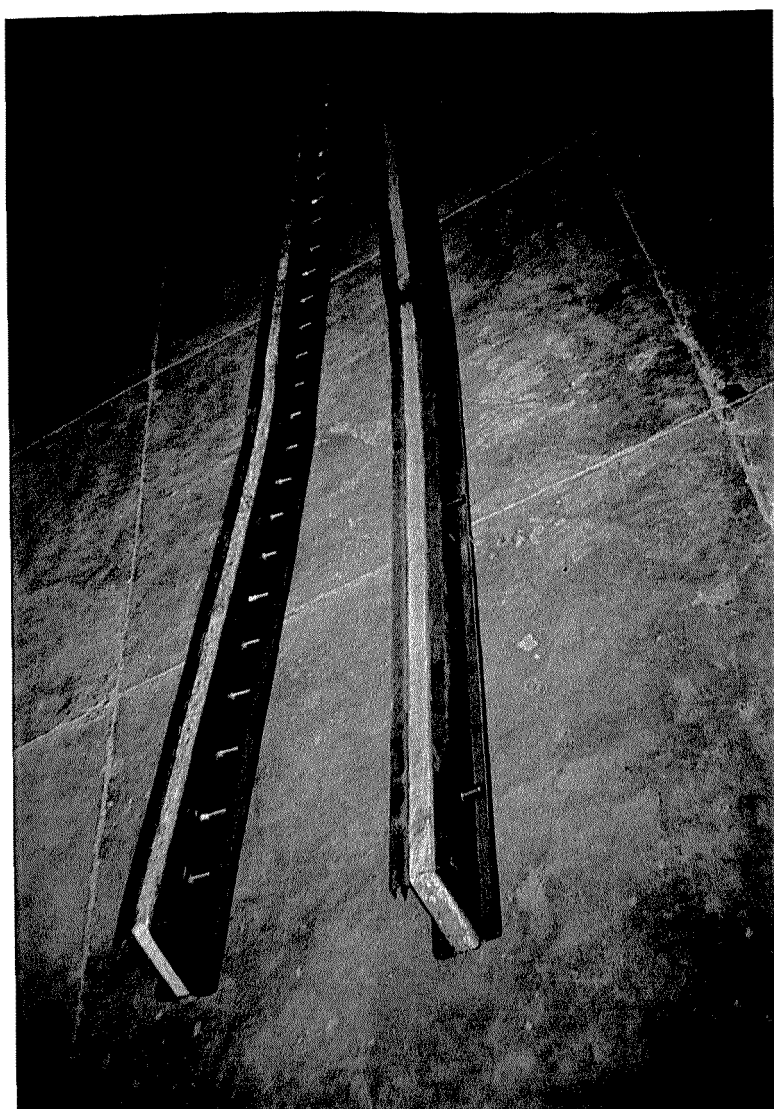


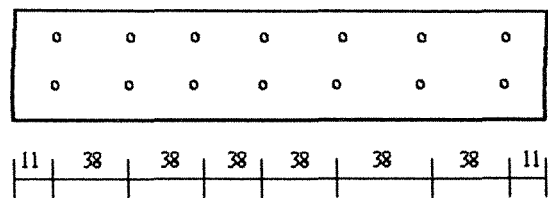
Figura 59 Foto da comparação do modelo com 23 parafusos de 6 mm

(esquerda) e cinco parafusos com 12,7 mm , ambos alinhados na alma na parte central

**8.7 ENSAIO DO MODELO COM 14 (QUATORZE)
PARAFUSOS DE DIÂMETRO 6 mm ALINHADOS
PRÓXIMOS ÀS MESAS .**

No item 8.4.2 foi calculado o número de parafusos necessários para a solidarização da viga mista através da análise do centro de cisalhamento de peças delgadas mencionado no capítulo 7 .

O diâmetro do parafuso utilizado foi o de 6 mm , perfazendo um total de 14 parafusos, com a distribuição desses , alinhados próximos às mesas da seguinte forma :



**Figura 60 Vista longitudinal da disposição dos parafusos na viga mista com
14 parafusos de 6 mm de diâmetro alinhados próximos às mesas .**

A distância entre linhas de parafusos pode ser vista na seção transversal da fig. 61. Salientamos que essa distribuição foi a mais próxima possível das mesas , uma vez que a furadeira não alcançava posição mais adequada , porque as abas enrijecedoras da chapa metálica impediam uma outra posição mais próxima das mesas .

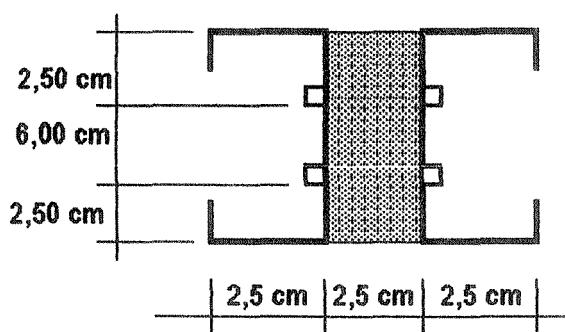


Figura 61 Seção transversal da viga mista com 2 linhas de parafusos próximas à mesa

Nesse ensaio, foram utilizados os mesmos equipamentos anteriores. Esse experimento pode ser visto através fig. 62, onde mostramos a viga mista no momento do carregamento.

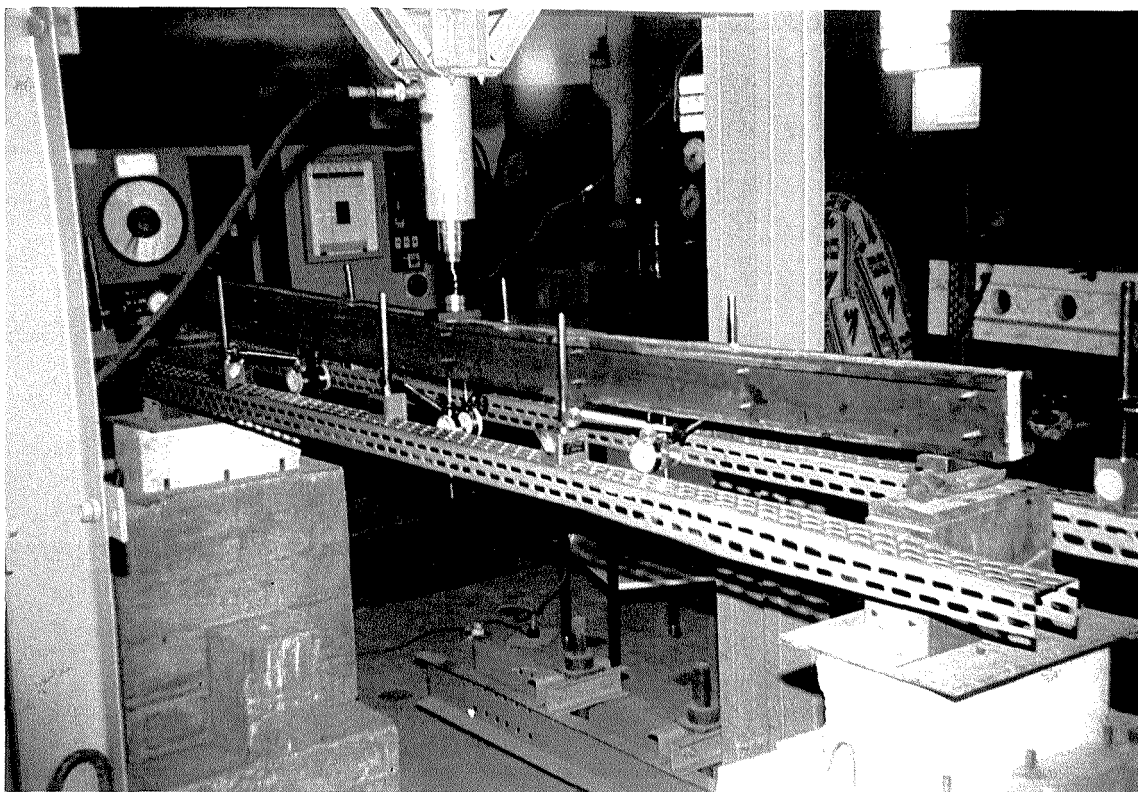


Figura 62 Foto do pórtico de carga aplicada à viga mista com 14 parafusos de 6 mm alinhados próximos às mesas no momento do carregamento.

Segundo esse modelo foram ensaiadas 2 peças , os resultados estão na tabela 8 . A disposição dos relógios comparadores é a mesma apresentada na fig. 47.

CARGA (kN)	R1 (mm)	R2 (mm)	R3 (mm)	R4 (mm)	R5 (mm)	R6 (mm)	R7 (mm)	R8 (mm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1,12	1,58	1,12	0,11	1,09	1,65	1,18	0,02
4	2,26	3,18	2,21	0,18	2,01	3,29	2,34	0,01
6	3,20	4,43	3,06	0,18	3,07	4,60	3,25	0,01
8	4,10	6,37	3,89	0,18	4,01	5,96	4,22	0,01
10	5,09	7,08	4,86	0,20	5,01	7,45	5,25	0,01

Tabela 8 Resultados extraídos de ensaios da viga com 14 (quatorze) parafusos de diâmetro 6 mm alinhados próximos às mesas da viga mista.

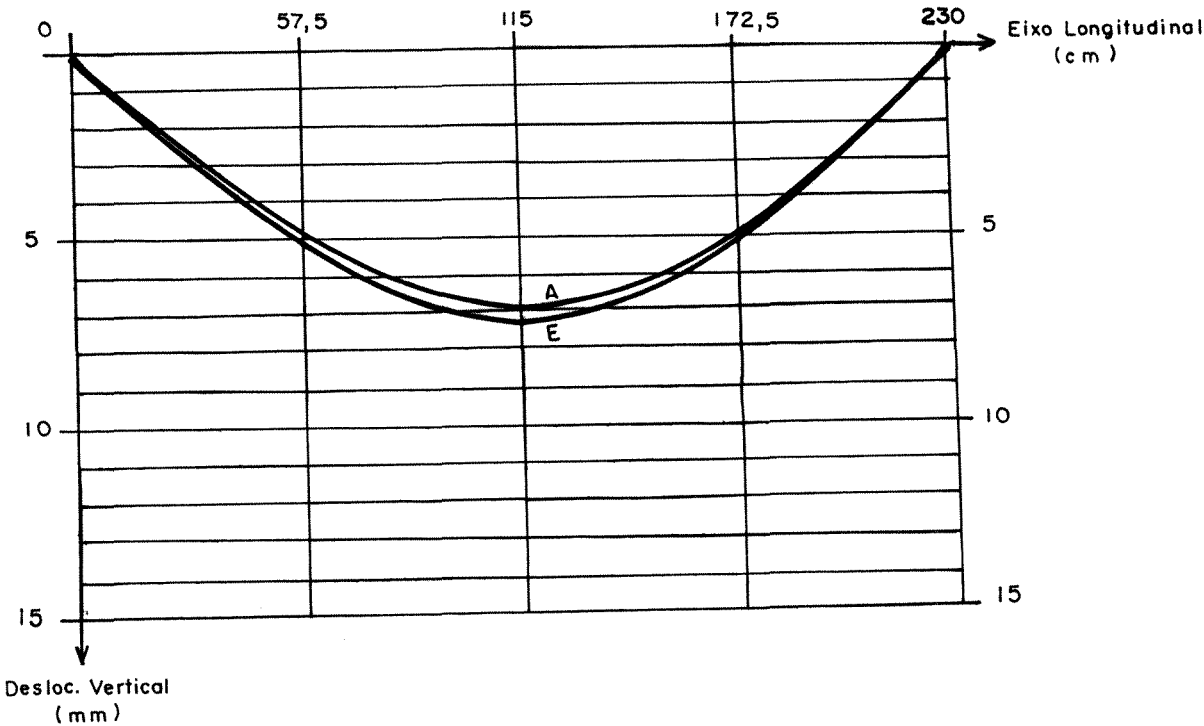


Figura 63 Diagrama dos deslocamentos verticais teórico (curva A) e experimental (curva E) para o carregamento de 10 kN da viga mista com 14 parafusos de diâmetro 6 mm alinhados próximos às mesas .

Podemos , agora , comparar o diagrama do comportamento à flexão experimental (representado pela curva E) da viga mista (tabela 8) , para a carga de 10 kN , com os dados teóricos (representado pela curva A) da tabela 5 , e observados na fig. 63 .

A viga mista desenvolveu um comportamento em relação ao deslocamento vertical experimental , mostrado pela curva E , de cerca de 5,61 % maior que a curva A , advinda de resultados teóricos .Obtivemos a ruptura dessa peça , com 24 kN , sendo que ocorreu torção da chapa, a partir da parte central . A fig . 64 mostra a viga entrando em colapso .

Como no já comentado no caso anterior (item 8.6) , a relação largura da madeira pelo diâmetro do parafuso é de 4,2 .

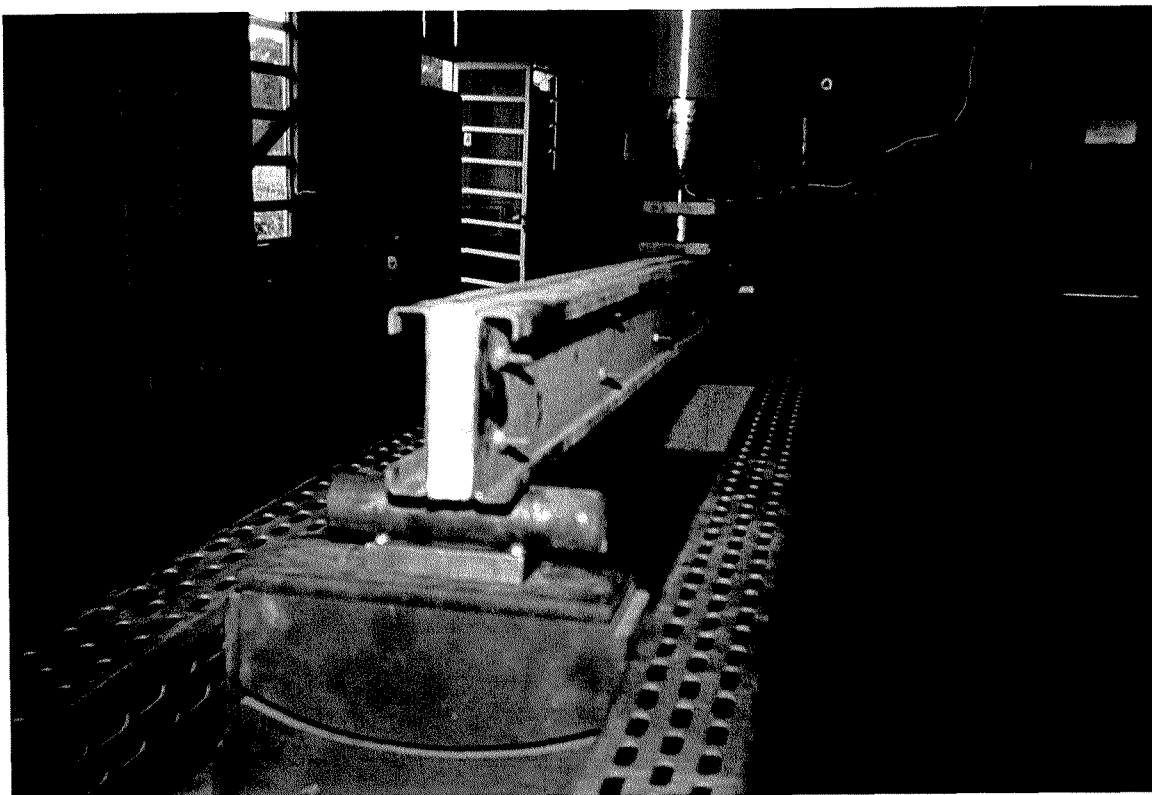


Figura 64 Foto da viga com 14 parafusos de 6 mm alinhados próximos à mesa no momento da ruptura

8.8 ENSAIO DO MODELO COM 13 (TREZE) PARAFUSOS DE DIÂMETRO 6 mm ALINHADOS PRÓXIMOS ÀS MESAS EM FORMA DE ZIG - ZAG .

No item 8.4.2 foi colocada a hipótese de trabalharmos com o mesmo espaçamento dos parafusos , calculados através da análise do centro de cisalhamento , porém dispostos na forma de zig - zag .

O nosso objetivo neste ensaio será o de averiguar a diferença de comportamento entre os parafusos alinhados próximos às mesas (item 8.7) e em forma de zig - zag mostrada na fig. 65 (o diâmetro do parafuso utilizado foi o de 6 mm, perfazendo um total de 13 parafusos) .

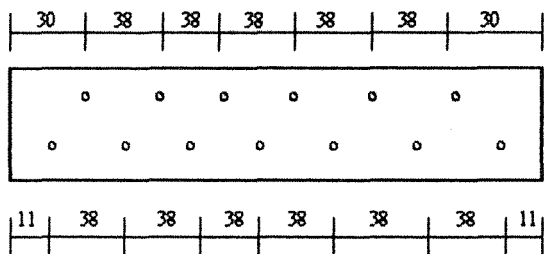


Figura 65 Vista longitudinal da disposição dos parafusos na viga mista com 13 parafusos de 6 mm de diâmetro alinhados próximos às mesas em forma de zig - zag .

A distância entre linhas de parafusos foi a mesma mostrada na seção transversal da fig. 61 . Esse ensaio pode ser visto através fig. 66 , onde mostramos a viga mista com parafusos em zig - zag no momento do carregamento .

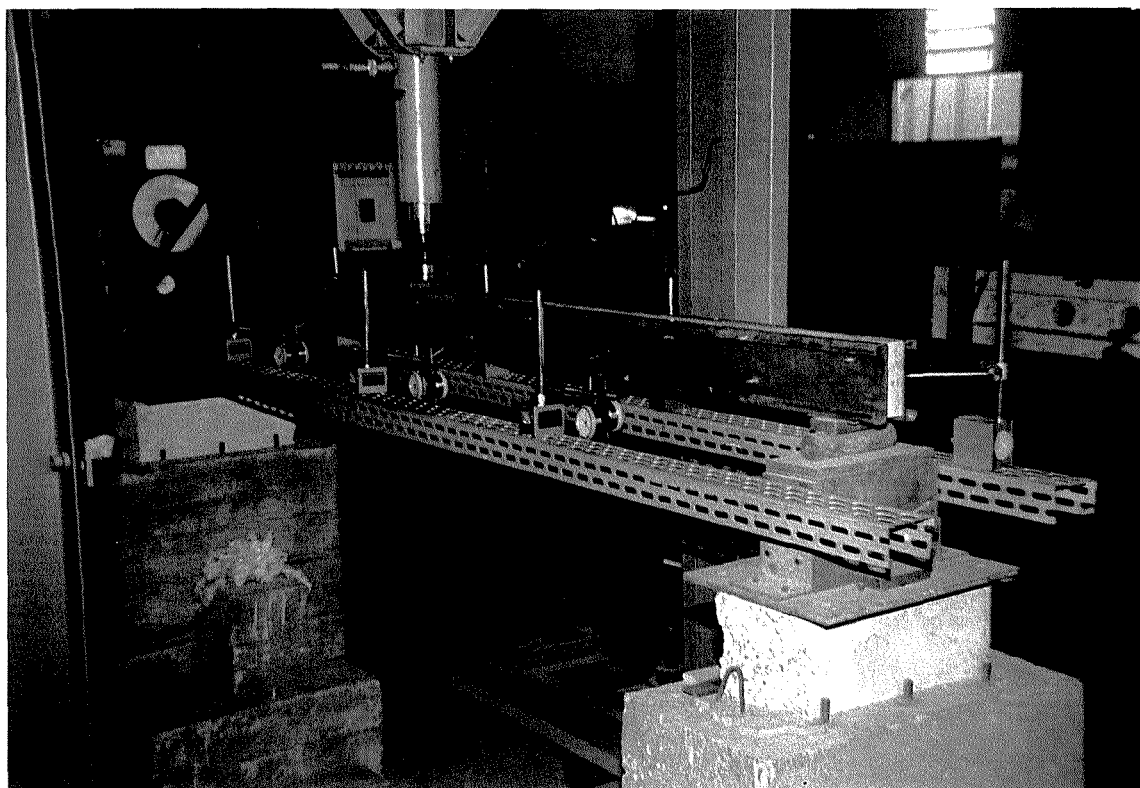


Figura 66 Foto do pórtico de carga aplicada à viga mista com 13 parafusos de 6 mm alinhados próximos à mesa em forma de zig - zag no momento do carregamento

De acordo com esse modelo foram ensaiadas 2 peças , e os resultados estão na tabela 9 .

CARGA (kN)	R1 (mm)	R2 (mm)	R3 (mm)	R4 (mm)	R5 (mm)	R6 (mm)	R7 (mm)	R8 (mm)
0		0	0	0	0	0	0	0
2	1,54	1,84	1,56	0,02	1,64	2,29	1,71	0,05
4	2,39	3,02	2,33	0,03	2,43	3,49	2,57	0,04
6	3,25	4,23	3,12	0,04	3,15	4,67	3,45	0,08
8	4,14	5,46	3,92	0,06	4,00	5,97	4,40	0,09
10	5,09	6,85	4,77	0,09	4,95	7,07	4,96	0,09

Tabela 9 Resultados extraídos de ensaios da viga com 13 (treze) parafusos com diâmetro 6 mm alinhados próximos às mesas em forma de zig - zag .

É possível comparar o diagrama referente ao comportamento à flexão experimental (representado pela curva F) da viga mista (tabela 9) , para a carga de 10 k N , com o diagrama de dados teóricos (representados pela curva A) , da tabela 5 . Neste sentido temos o seguinte gráfico :

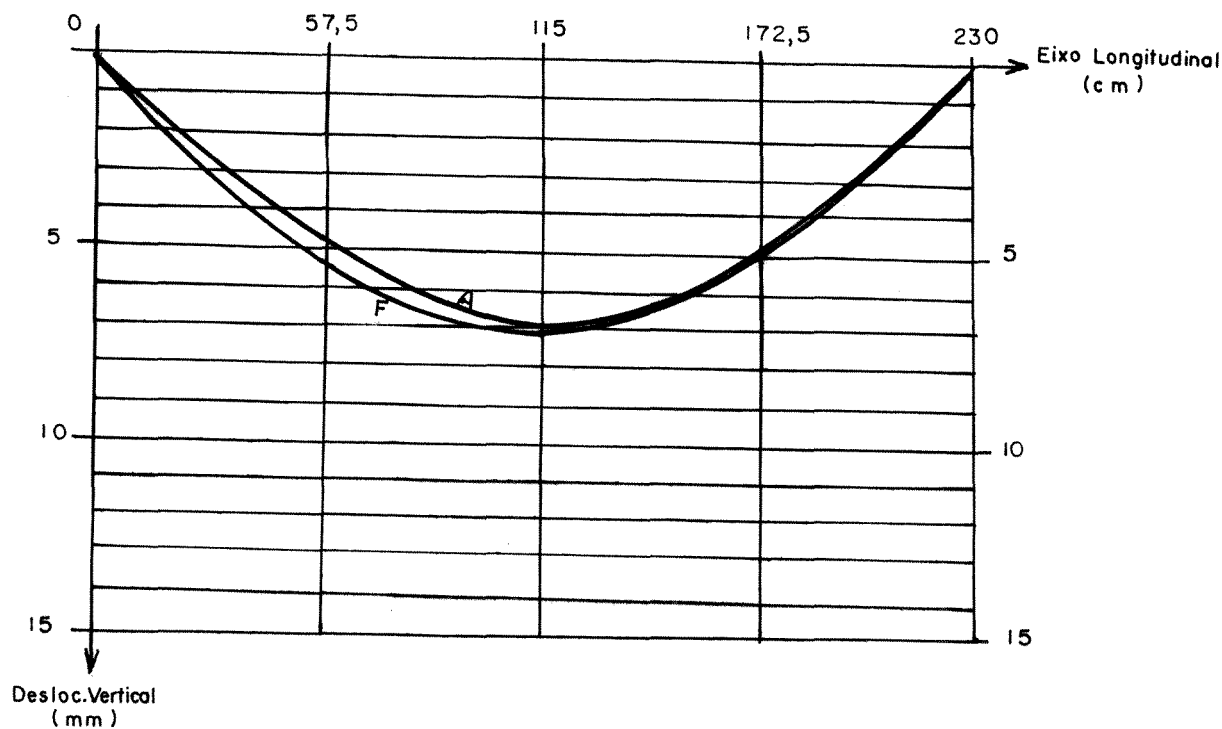


Figura 67 Diagrama do deslocamento vertical teórico (curva A) e experimental (curva F) para o carregamento de 10 kN da a viga mista com 13 parafusos de diâmetro 6 mm alinhados próximos às mesas em forma de zig - zag.

Verificamos que a distribuição em forma de zig - zag vista através da curva experimental F na fig. 67 em relação a curva A , advinda dos resultados teóricos , mostrou-se muito eficiente , com aproximadamente 2,57 % de diferença . O ensaio evidencia que este tipo de ligação é a que mais se aproximou dos valores teóricos .

A ruptura ocorreu com 24 kN , e também ocorreu por torção da chapa a partir da parte central da viga como no caso anterior do item 8.7 . A viga no momento de sua ruptura pode ser vista na fig. 68 .

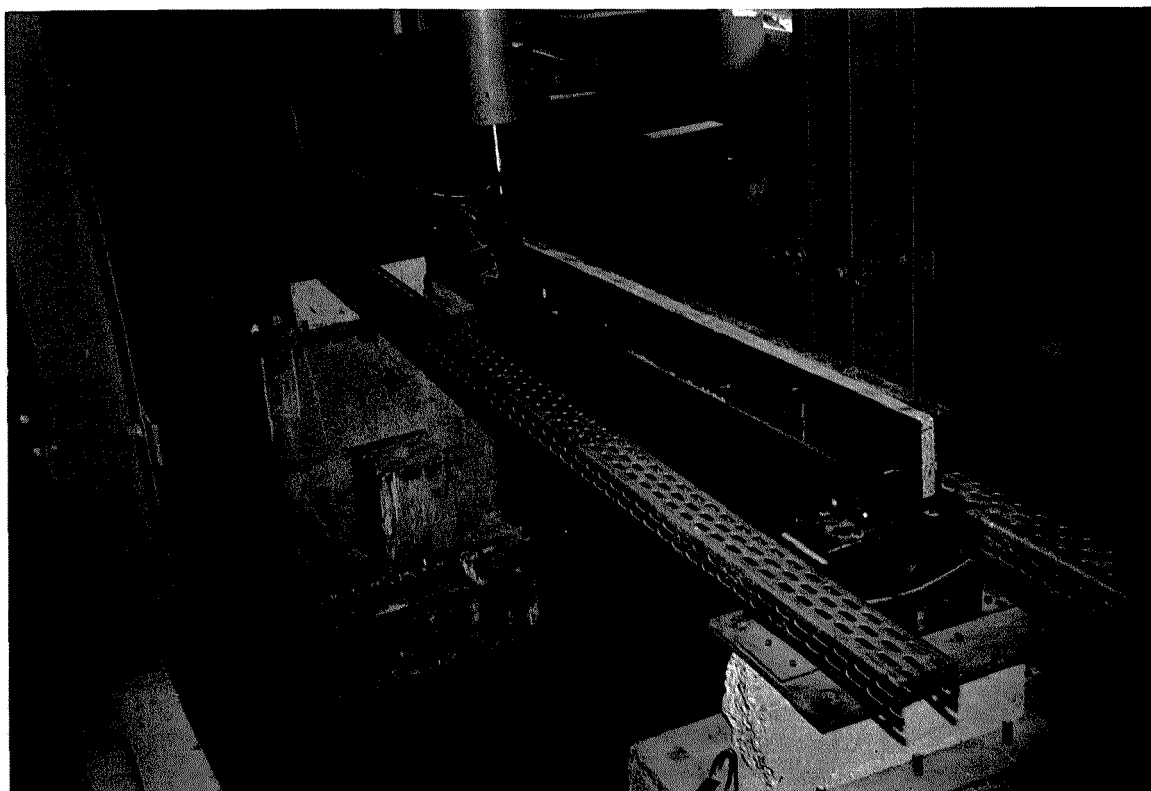


Figura 68 Foto da viga com 13 parafusos próximos à mesa em forma de zig-zag , entrando em colapso

Como foi verificado nos itens 8.6 e 8.7 , a relação largura da madeira pelo diâmetro do parafuso é de 4,2 também .

A comparação da viga com os parafusos em zig-zag ou simplesmente alinhados , ambos com diâmetro de 6 mm , mostraram um comportamento praticamente igual no comportamento à flexão da viga mista . A vantagem da viga com distribuição em forma de zig zag em cerca de 3,04 % é bastante pequena para dados experimentais . Na ruptura não manifestou nenhuma diferença entre elas , pois obtivemos o mesmo valor , ou seja 24 kN . Além disso o tipo de ruptura também foi igual .

As vigas após a ruptura podem se observadas através da figura 69 .



Figura 69 Foto da comparação da ruptura entre a peça com distribuição dos parafusos em forma de zig-zag (direita) ou parafusos alinhados (esquerda) , todos próximos às mesas

8.9 COMENTÁRIOS A RESPEITO DOS RESULTADOS OBTIDOS

Observamos , de um modo geral, que o melhor desempenho estrutural das vigas ocorreu com parafusos flexíveis , independente do tipo de cálculo . Isso se deve ao fato de que devemos levar em conta , também , a distância entre os parafusos , pois sempre que usamos distâncias pequenas , obtivemos melhores resultados .

Nos ensaios da viga mista verificamos que a madeira não apresenta problemas de flambagem , pois a mesma no conjunto encontra - se contida na sua direção mais crítica , enquanto que a chapa apresentou problemas de flambagem na direção de menor inércia (eixo y da fig. 70) , principalmente para espaçamentos muito grande . Existe , então, uma relação entre a esbeltez (λ) do conjunto e a esbeltez da chapa , ou seja :

$$\lambda_{conjunto} \geq \lambda_{chapa} \dots\dots\dots(121)$$

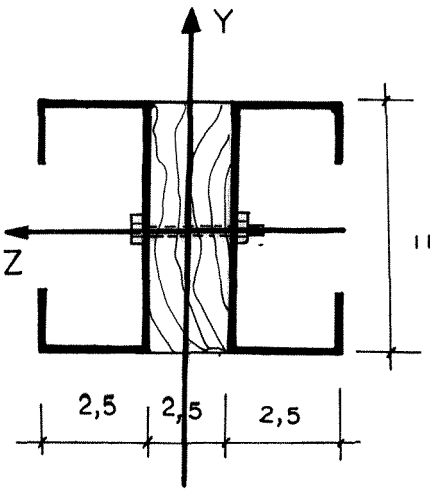


Figura 70 Eixos de referência da viga mista

Através dos eixos de referência da viga mista na fig. 70 , a direção de menor esbeltez (λ_y) é dada por :

$$\lambda_y = \frac{k\ell}{i_y} \dots\dots\dots(122)$$

Onde :

k = coeficiente na direção do menor raio de giração em função dos vínculos extremos da barra , que tem o seguinte valor :

$k = 1$, para os dois extremos considerados apoios ;

$k = \frac{1}{2}$, para os dois extremos engastados ;

$k = 2$, para um extremo livre e o outro engastado ;

$k = \frac{2}{3}$, para um extremo apoiado e o outro engastado.

ℓ = comprimento da barra ;

$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ = raio de giração na direção do eixo y ;

I_y = momento de Inércia na direção do eixo y ;

A = área da seção transversal .

Utilizando a expressão (122) em (121) , temos :

$$\ell_{ch} = \frac{k_v \ell_v}{\sqrt{\frac{I_{y_v}}{A_v}}} \frac{\sqrt{\frac{I_{y_{ch}}}{A_{ch}}}}{K_{ch}} \dots\dots\dots (123)$$

Onde , o subscrito “ v ” significa o conjunto que forma a viga (transformada), e “ ch ” só uma chapa .

Utilizando o método da seção transformada considerando o eixo y como referência e mantendo a altura da viga na direção desse eixo , modificando apenas a largura, a seção transformada fica :

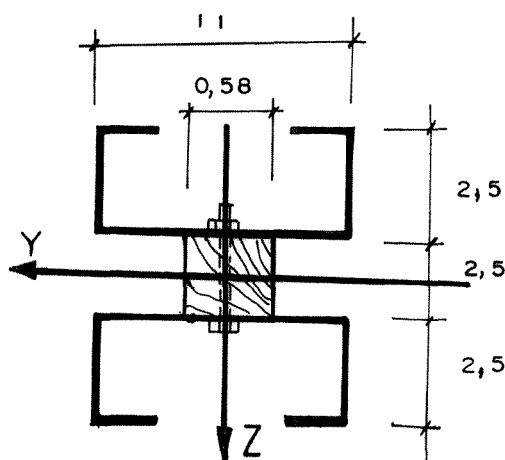


Figura 71 Seção transformada em relação ao eixo y

Sendo que , para efeito de segurança vamos tomar o fator k como sendo igual a 1 (um) em todos os casos , e o demais dados como :

$$k = 1 ;$$

$$\ell_v = 230 \text{ cm} ;$$

$$I_{y_{ch}} = 3,87 \text{ cm}^4 ;$$

$$I_{y_v} = 48,65 \text{ cm}^4 ;$$

$$A_{ch} = 4,75 \text{ cm}^2 ;$$

$$A_v = 10,96 \text{ cm}^2 ;$$

$$n_w = \frac{E_w}{E_s} = 0,053 .$$

Aplicando a equação (123) , o máximo espaçamento para os parafusos , em função da esbeltez de uma chapa seria :

$$\ell_{ch} = 99,98 \text{ cm}$$

Como podemos observar , se compararmos este espaçamento com aquele estipulado na viga no item 8.3.1 , indicado pelo fabricante (cada 115 cm) , era natural que a chapa tivesse flambagem antes de atingir sua capacidade máxima , além disso , esse modelo foi o que pior desempenho produziu na flexão .

Nenhuma das vigas “calculadas” romperam por flambagem , mostrando que é preciso ter um cuidado especial na hora de confeccionar as ligações das peças .

Essa preocupação se faz presente uma vez que se poderia evitar muitos acidentes em obras de construção civil; pois no item 8.3.1 a ruptura ocorreu com 16 kN e no item 8.5 considerando o mesmo tipo de parafusos , só que devidamente calculados , a viga rompeu com 21 kN ; obtendo uma margem superior a 31 % na ruptura . Essa margem constatada poderia até ter evitado acidente como o mencionado na fig. 3 .

Se formos além , como vimos nos outros experimentos com distribuição dos parafusos de outras maneiras , usando parafusos flexíveis por exemplo, a ruptura pode chegar a 24 kN, obtendo uma resposta da viga mista em relação ao item 8.3.1(não calculado) de cerca 50% superior, trazendo uma margem ainda maior .

Devemos também nos preocuparmos com o fator “segurança” que é muito importante em qualquer atividade humana , e neste trabalho ela deve ser considerada . Os calculistas devem evitar trabalhar com valores próximos do escoamento do material , e isso podemos fazer adotando um coeficiente de segurança . A NBR 8800^[6] , utiliza o método dos estados limites, que é um método semi-probabilístico, e que deveria ser adotado no caso dos cálculos em cimbramentos metálicos como recomenda esta norma .

FRUCHTENGARTEN ^[13] informa que existem outros métodos como por exemplo o das tensões admissíveis , onde são comparadas as tensões máximas “em utilização” pela fração da capacidade resistente do material (tensão admissível) . Para o caso de tração ou compressão simples , seria :

$$\frac{N}{A} \leq \frac{f_y}{\gamma} \dots\dots\dots (124)$$

onde :

N = força normal ;

A = área da seção transversal do material ;

f_y = tensão de escoamento do aço ;

γ = coeficiente de segurança interno = 1,66 .

No caso de flexão simples , poderemos escrever :

$$\frac{My}{I} \leq \frac{f_y}{\gamma} \dots\dots\dots (125)$$

Sendo que :

M = momento fletor de cálculo;

y = ponto considera em relação ao eixo y ;

I = momento de inércia .

Admitindo - se o método das tensões admissíveis num primeiro instante , a tensão máxima aplicada à viga mista seria :

$$\sigma_{max} = 0,60 f_y = 0,60 \times 237,74 = 142,64 \text{ Mpa}$$

Utilizando-se as expressões (32) e (60) , a viga mista teria um momento de cálculo para o trabalho do calculista de cimbramentos metálicos de :

$$M_{max} = 440,20 \text{ kN} . \text{ cm} .$$

9 VERIFICAÇÃO DAS TENSÕES

Foram avaliadas as tensões na região próxima ao parafuso central da viga com distribuição dos parafusos em forma de zig-zag , da qual obtivemos melhor desempenho na flexão . Para essa finalidade instalamos extensômetros elétricos (strain gages), na viga mista, marca Shinkch, tipo S108 com 10 mm de comprimento , fator $K = 1,99$, e resistência elétrica $120,0 \, \Omega \pm 0,3\%$.

Para as leituras foram utilizados ponte e comutador da marca HUGGENBERGER ZURICH , modelo JT2925.

O posicionamento dos extensômetros obedeceu a distribuição na seção transversal mostrada na fig. 72 , onde, os extensômetros indicados de M1 a M5 correspondem a madeira, e de A1 a A5 ao aço .

Na fig. 73 apresentamos a colagem dos extensômetros aplicados na chapa e na madeira . A distância entre eles atingiu 2,75 cm . Foi mantida a distância entre apoios de 230 cm , conforme realizado nos ensaios anteriores .

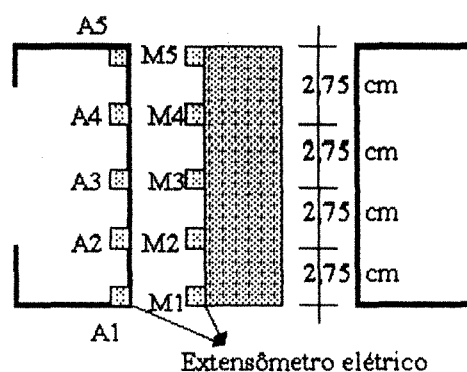


Figura 72 Posição dos extensômetros na seção transversal da viga

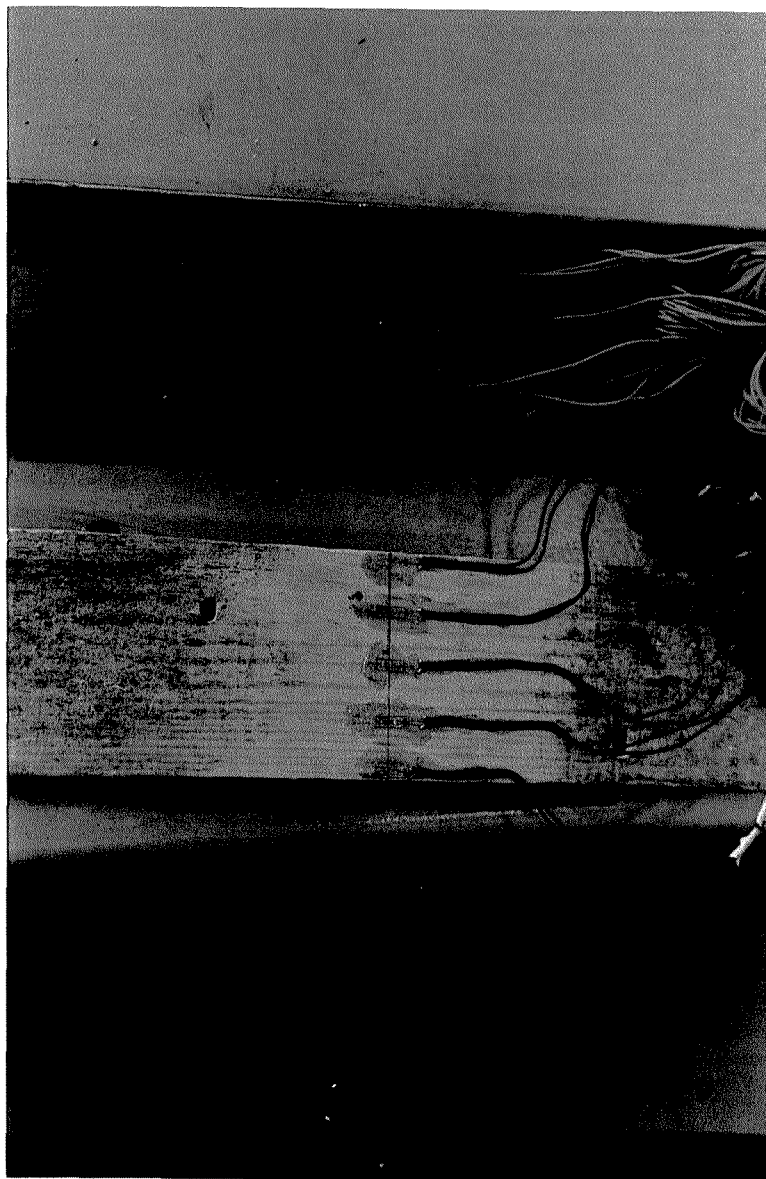


Figura 73 Foto da colagem dos extensômetros na madeira e na chapa de aço

A posição dos extensômetros no sentido longitudinal pode ser vista na fig. 74 . Foi escolhido uma região próxima a parte central , mas afastada de 11 cm do ponto de aplicação do esforço , para evitar as perturbações próximas à carga . Em seguida, na fig. 75, pode ser vista a realização do ensaio .

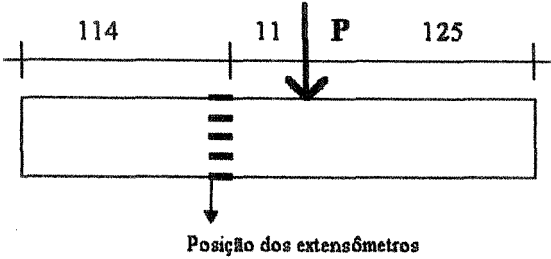


Figura 74 Vista dos extensômetros no sentido longitudinal da viga

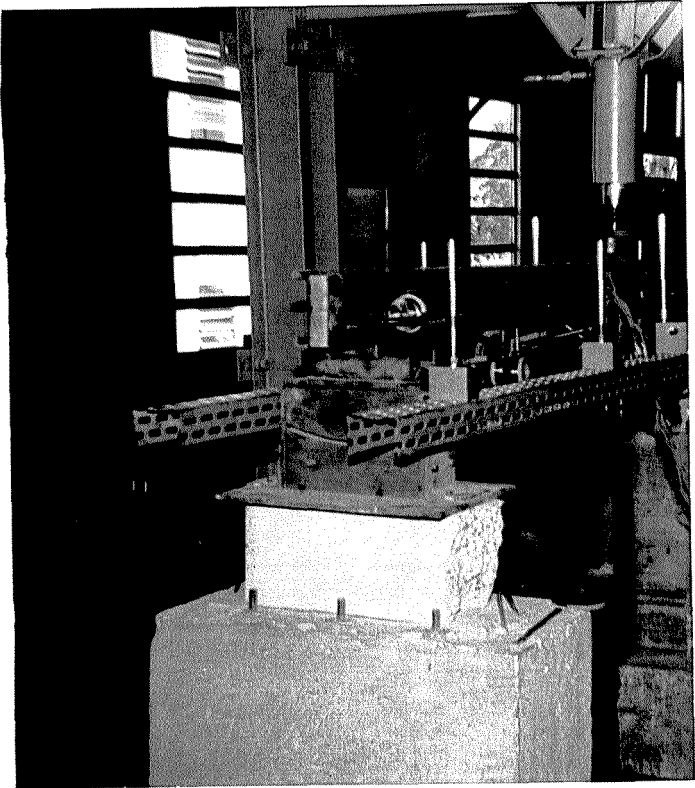


Figura 75 Foto da viga mista instrumentada com extensômetros no momento do carregamento

Nesta fase foram realizados 2 ensaios e os resultados experimentais mostrados na tabela 10 para a madeira e o aço na tabela 11 .

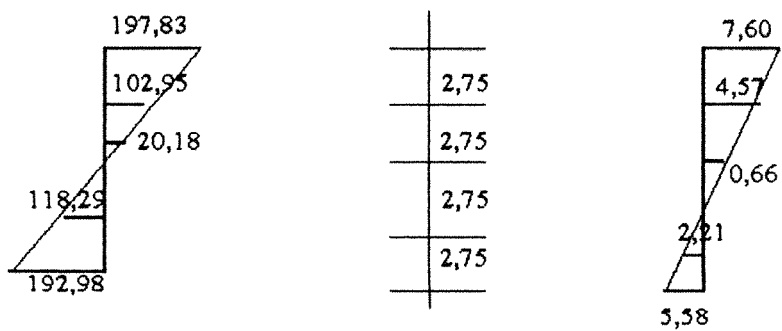
Carga (kN)	M1 $\times 10^{-3}$	M2 $\times 10^{-3}$	M3 $\times 10^{-3}$	M4 $\times 10^{-3}$	M5 $\times 10^{-3}$
2	0,090	0,040	-0,010	-0,073	-0,138
4	0,185	0,075	-0,018	-0,150	-0,258
6	0,275	0,110	-0,030	-0,230	-0,393
8	0,383	0,153	-0,045	-0,320	-0,538
10	0,488	0,193	-0,058	-0,400	-0,680

Tabela 10 Resultado das deformações experimentais na madeira próxima a região do parafuso central .

Carga (kN)	A1 $\times 10^{-3}$	A2 $\times 10^{-3}$	A3 $\times 10^{-3}$	A4 $\times 10^{-3}$	A5 $\times 10^{-3}$
2	0,079	0,042	-0,023	-0,042	-0,079
4	0,163	0,087	-0,028	-0,100	-0,163
6	0,252	0,130	-0,033	-0,153	-0,254
8	0,344	0,184	-0,037	-0,212	-0,352
10	0,445	0,237	-0,047	-0,273	-0,456

Tabela 11 Resultado das deformações experimentais na chapa de aço próxima a região do parafuso central .

Para visualização do resultado experimental , podemos traçar o diagrama esquemático das tensões, utilizando a lei de Hooke , para a carga de 10 kN aplicada no conjunto, ou seja , chapa de aço e madeira , e que podem ser vistos na fig. 76 .

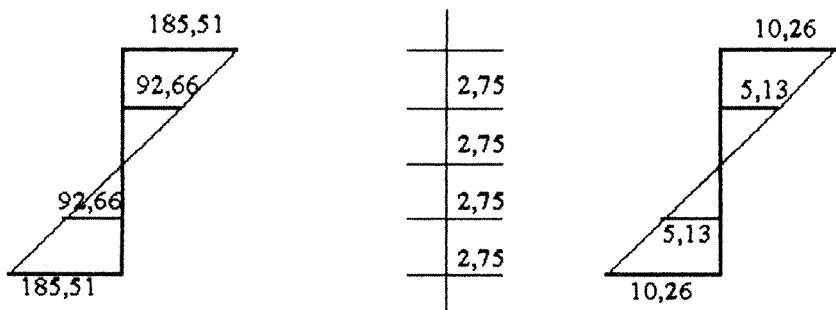


a) Tensão na chapa de aço (Mpa)

b)Tensão na madeira (Mpa)

Figura 76 Diagrama de tensão na flexão (experimental)

O diagrama esquemático de tensão na flexão teórica , está representado pela fig. 77.



a)Tensão na chapa de aço (Mpa)

b) Tensão na madeira (Mpa)

Figura 77 Diagrama de tensão na flexão teórica para os materiais da viga de seção transformada .

As tensões de compressão na madeira apresentaram cerca de 26 % menor que o previsto , mostrado pela fig. 77 , enquanto que na tração houve cerca de 46 % menos que o

resultado esperado . Na chapa metálica podemos observar que na compressão houve cerca de 7 % de tensão superior da parte experimental em relação à parte teórica , e na tração 4 % a maior da parte experimental em relação aos valores obtidos teoricamente . Houve um deslocamento da linha neutra para baixo nos dois materiais envolvidos(aço e madeira) .

Através dessas constatações , podemos salientar que, a chapa acumulou mais tensões do que o valor teórico e a madeira registrou uma tensão menor , mostrando que o mecanismo de transferência de carga se faz da chapa para a madeira .

10 CONCLUSÕES .

As conclusões que podemos destacar , no presente momento , são as seguintes :

1) A investigação teórica e a comprovação experimental realizadas neste trabalho evidenciam que o dimensionamento da viga composta em chapa de aço e madeira serrada através do método da seção transformada pode ser feito com bons resultados .

2) O uso da viga de seção composta em estruturas de cimbramentos à luz dos resultados alcançados é plenamente viável .

3) A madeira , na parte central , na extensão do comprimento da viga mista , tem grande importância , pois foi possível verificar que há uma sensível melhora da eficiência estrutural da viga , referente por exemplo à carga de ruptura (cerca de 18% maior) .

Caso a viga não apresente a madeira na parte central como mostra a figura 78 , podemos observar o problema de perda de estabilidade por torção .

A contribuição da madeira na rigidez da barra é de cerca de 9 % , e na rigidez transversal cerca de 0,21 % . Esse aumento de eficiência da viga mista sem um aumento proporcional na rigidez se deve ao fato que a madeira impede a chapa de girar , sob o efeito de torção , em relação ao seu centro de cisalhamento como mostra a fig. 79 .

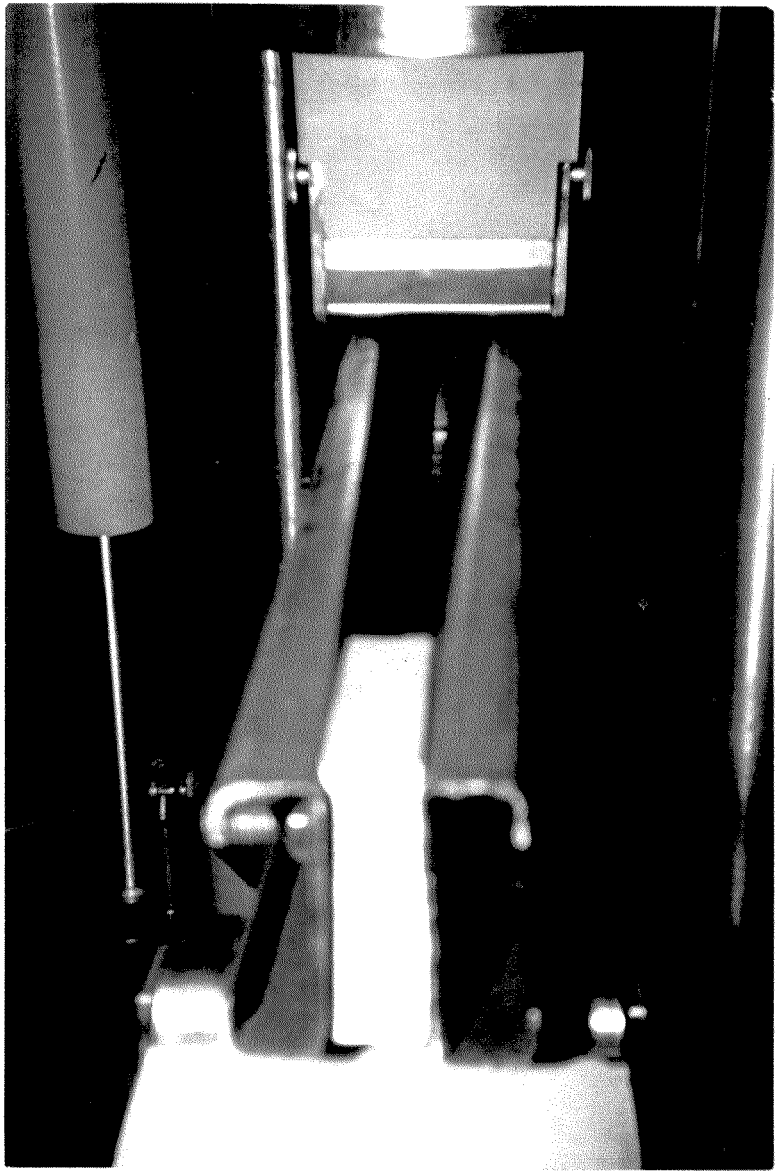


Figura 78 Viga com perda de estabilidade por torção

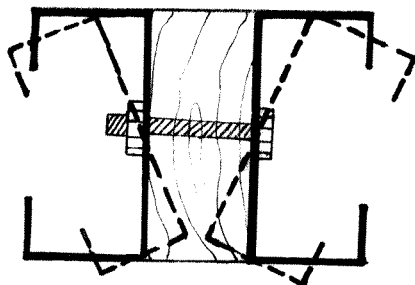


Figura 79 Impedimento de rotação da chapa metálica pela madeira

3) Quase toda a rigidez da peça é proveniente das chapas de aço, pois o parâmetro base de transformação da viga mista, o módulo de elasticidade, tem grande proporção e, neste caso, a madeira tem mais importância no conjunto, pela sua grande maleabilidade e contribuição para o travamento das formas em concreto de obras de construção civil, do que propriamente na rigidez da peça. Sendo assim, sua contribuição na melhora do desempenho ao deslocamento vertical seria muito pequena.

Cabe-nos, entretanto, ressaltar que a madeira é muito importante para a fixação das formas, e sem ela, seria quase impossível fixá-las escoramento.

4) Com relação aos diagramas das elásticas das vigas na flexão e das hipóteses apresentadas durante o transcorrer do trabalho temos:

a) A distribuição em forma de zig - zag (item 8.8 curva F) obteve o melhor desempenho na flexão .

b) Comparando a curva da peça com 14 parafusos próximos à mesa (item 8.7 curva E) alinhados , calculada através do centro de cisalhamento , e aquela com 23 parafusos na alma , calculada através do fluxo de cisalhamento (item 8.8 curva D) , o comportamento foi igual na sua fase elástica . Existiu ligeira vantagem de cerca de 4% na ruptura para os parafusos alinhados na mesa

c) A utilização de parafusos rígidos , implica em espaçamento entre parafusos muito grande , sendo assim , o uso de parafusos flexíveis fornecerá elásticas muito mais próximas do valor teórico .

Esta informação nos leva a outra , ou seja , que a esbeltez de um elemento do conjunto (chapa) , deve ser menor ou igual a esbeltez do conjunto , ou :

$$\lambda_{\text{conjunto}} \geq \lambda_{\text{chapa}}$$

5) Verificamos que o dimensionamento através da análise do centro de cisalhamento , é mais econômico , pois a quantidade de parafusos empregados em relação ao fluxo de cisalhamento é menor .

6) A análise das tensões na região próxima ao parafuso indicou que o mecanismo de transferência da carga aplicada na viga mista se fez primeiro pela chapa e em seguida transmite pela a madeira .

7) Este trabalho procura alertar as empresas fabricantes que se poderia evitar muitos acidentes em construção civil , apenas aplicando um cálculo adequado às vigas mistas , trazendo mais segurança , economia e confiança , tanto para quem usa , quanto para o fornecedor do equipamento .

8) Numa próxima etapa de trabalho pretendemos estudar novas aplicações das vigas compostas, tais como: terças de coberturas , pilares de casas pré fabricadas, reforço de vigas de madeira , etc. .

11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AÇO MINAS GERAIS S.A.- ACOMINAS SIDERBRAS , Elementos Estruturais e Ligações Belo Horizonte, Aço Minas Gerais S.A- AÇOMINAS . , Vol III , 161 p., 1980 .

- [2] AGOSTINI , L. R. S . , CATTO , A. J. , STAMATO, M. C. , Ligações de peças de pinho do Paraná e de eucalipto Citriodora com parafusos de aço , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP, Publicação nº. 160 , 42 p. , 1971.

- [3] ALMEIDA , P. A . O . ; FUSCO . P. B. ; RODRIGUES Jr. , M. S. , Fundamentos do método para a determinação das resistências das ligações pregadas ou parafusadas em estruturas de madeira In V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol II, 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 315-326, 1995 .

- [4] ALMEIDA , P. A. O. , Estruturas de grande porte de madeira composta , São Paulo, PEF-EPUSP , Tese de Doutorado, 1990 .

- [5] ASSAN, A . E . , Seções Delgadas Abertas - Centros de Cisalhamento , Campinas , Unicamp-Departamento de Construção Civil , 37 p. , 1988.

- [6] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS . Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (NBR 8800/1986), Rio de Janeiro , 220 p. , 1986 .
- [7] BARBATO, R. L. A. , Flexão Simples Normal - Linha Elástica , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP , Publicação nº. 004/95 , 16 p. , 1993 .
- [8] BLACK, P. Strength of materials, Oxford, Pergamon Press , 453 p., 1966
- [9] BODIG, J. ; JAYNE, B. A. Mechanics of wood and wood composites, New York, Van Nostrand Reinold , 712 p .1982.
- [10] CARRASCO , E. V. M. , Análise de vigas de madeira laminada colada : uma contribuição ao estado da arte , parte I In : V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol I, 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 475-496 , 1995
- [11] CARRASCO , E. V. M. , Análise de vigas de madeira laminada colada : uma contribuição ao estado da arte , parte II In V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol I, 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro Brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 497-515 ,1995 .

- [12] CHEN, W. F. , SALEEB, A. , Constitutive Equations for Engineering Materials. New York, John Wiley e Sons , Vol 1 : Elasticity and Modeling , p. 1-181, 1982 .

- [13] FRUCHTENGARTEN, J., Dimensionamento de Estruturas de Aço, EPUSP- FDTE-COSIPA, Núcleo de tecnologia da construção , 339 p. ,1986.

- [14] GALAMBOS , Theodore V. , Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, New York , John Wiley & Sons, 4th edition , 786p , 1976 .

- [15] GIRHAMMAR, U. A. , GOPU, V. K. A. , Composite beam-columns with interlayer slip - exact analysis. In: Journal of Structural Engineering, Vol 119, nº 4, abril, p. 1265-1282 , 1993.

- [16] JOHN, C. ; CHILVER, A. H., Strength of materials and structures. London, Edward Arnold, second edition , 404 p. ,1961.

- [17] KULAK,I. G. L.,FISHER , J.W., STRUIK, J. H. A. , Guide to design criteria for bolted and riveted joints, New York , John Wiley & Sons , second edition , 333p.,1987.

- [18] LAIER , J. E. ; BARREIRO , J. C. , Complementos de resistência do materiais , São Carlos, Escola de Engenharia São Carlos /USP, Publicação nº. 073/92 reimpressão , 208 p. , 1983.

- [19] LANGENDONCK, T. V. Resistência dos Materiais- Deformações I , Rio de Janeiro, Editora Científica , 252 p. ,1960.
- [20] LANGENDONCK, T. V. , Resistência dos Materiais- Deformações II , São Paulo , Editora Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo , 293 p.,1960 .
- [21] LEKHNTSKII, S. G. , Theory of elasticity of an anisotropic body . Moscu , Mir, p. 10-98, 1981 .
- [22] LISBOA , C. R. , Ligação de peças estruturais de madeira por parafusos , São carlos, Dissertação de Mestrado - Escola de Engenharia São Carlos /USP , 105 p., 1991 .
- [23] LUCHESE , J.A., STAMATO, M. C., Ligações de peças de peroba rosa com parafusos de aço , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP, Publicação n°. 147 , 42 p. , 1967.
- [24] MALITE , M., Estruturas de aço constituídas por perfis de chapa dobrada: dimensionamento de ligações , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos/USP, publicação n°. 022/93 , 49 p. , 1993 .
- [25] MALLICK , P. K. Fiber-Reinforced Composites: Material , Manufacturing, and Design , Ed. Marcel Dekker Inc. , New York, 469 p . ,1988 .

- [26] MASCIA, N. T., FURLANI, J. E., Sobre o coeficiente de Poisson da madeira In : V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol II, 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 205-214, 1995 .
- [27] MASCIA, N.T. Considerações a respeito da anisotropia na madeira , São Carlos, Tese de Doutorado - Escola de Engenharia São Carlos /USP , 295 p., 1991.
- [28] MERRITT, S. Frederick , LOUCKS, R. D., "Connections" In : Structural Steel Designers Handbook, New York, p. 5.81 - 5.85 , 1972.
- [29] NEWMARK, N. M. ; SIESS, C. P. ; VIEST, I. M. , Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction , Proc. Soc. for Experimental Stress Analysis , vol 9 , nº 1 , p. 75-92 , 1951.
- [30] PALERMO Jr, Leandro, Princípios da Energia e Introdução aos Métodos Variacionais , Apostila sem identificação de publicação .
- [31] PARKER, Harry, Diseño Simplificado de Estructuras de Madera, México , Editorial Limusa - Wiley , 311p., 1972 .
- [32] PFEIL, Walter. Cimbramentos . Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. , 431 p. , 1987.

- [33] POPOV, E. P., Introdução à mecânica dos sólidos, Tradução: AMORELLI, M. O. C. , São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda , 521 p., 1913.
- [34] SALMON, C. G., JHONSON , J.E. , Steel Structures Design and Behavior, Scranton , Intext Educational Publishers , 946 p. , 1971 .
- [35] STRAUCH , C. E. M. , Resistência ao momento fletor de vigas I simétricas não esbeltas , Salvador ,Centro Editorial e Didático da UFBA , p 125-139 , 1990.
- [36] THIMOSHENKO , S. P.,GERE , J. E. , Mecânica dos Sólidos , vol .1, Livros Técnicos e Científicos Editora , Rio de Janeiro ,1960
- [37] TIMOSHENKO, S. P. Resistência dos Materiais , Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, Vol 1 , 1a. edição, 451 p., 1971.
- [38] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER ,J. N., Teoria da Elasticidade ,Rio de Janeiro,Editora Guanabara Dois S.A., 3a. edição, 545 p., 1980.
- [39] WILLIAMS, D. C. ; HARRIS, C. E. , Structural Design in Metals , New York, The Ronald Press Company, Second Edition , 655 p. ,1987 .
- [40] YU, Wei-Wen , Cold-Formed Steel Structures - Design Analysis Construction, New York , McGraw-Hill Book Company , 463 p. , 1973 .

12 BIBLIOGRAFIA

AÇO MINAS GERAIS S.A.- ACOMINAS SIDERBRAS , Elementos Estruturais e Ligações
Belo Horizonte, Aço Minas Gerais S.A- AÇOMINAS . , Vol III , 161 p., 1980 .

AGOSTINI, L. R. S . , CATTO , A. J. , STAMATO, M. C. , Ligações de peças de pinho do Paraná e de eucalipto Citriodora com parafusos de aço , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP, Publicação nº. 160 , 42 p. , 1971.

ALMEIDA , P. A. O . ; FUSCO . P. B. ; RODRIGUES Jr. , M. S. , Fundamentos do método para a determinação das resistências da ligações pregadas ou parafusadas em estruturas de madeira In V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol II, 1995, Belo Horizonte , Anais: do v Ebramem - Encontro brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 315-326 ,1995.

ALMEIDA , P. A. O. , Estruturas de grande porte de madeira composta , São Paulo, PEF-EPUSP , 1990, Tese de Doutorado, 1990 .

AMERICAN INSTITUTE OF TIMBER CONSTRUCTION. Timber construction manual , USA, AITC, John & Wiley, 181 p., 1974 .

ASSAN, A . E . , Seções Delgadas Abertas - Centros de Cisalhamento , Campinas , Unicamp-Departamento de Construção Civil , 37 p. , 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS . Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (NBR 8800/1986) , Rio de Janeiro , 220 p. , 1986 .

BARBATO, R. L. A. , Flexão Simples Normal - Linha Elástica , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP , Publicação nº. 004/95 , 16 p. , 1993 .

BLACK, P. Strength of materials, Oxford, Pergamon Press , 453 p., 1966

BODIG, J. ; JAYNE, B. A. Mechanics of wood and wood composites, New York, Van Nostrand Reinold , 712 p .1982.

CALIL Jr, C.; PFISTER , G. , Treliças de madeira para coberturas , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP , Publicação nº. 054/95 reimpressão, 79 p., , 1995 .

CARRASCO , E. V. M. , Análise de vigas de madeira laminada colada : uma contribuição ao estado da arte , parte I In : V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol I, 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro Brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 475-496 , 1995.

CARRASCO , E. V. M. , Análise de vigas de madeira laminada colada : uma contribuição ao estado da arte , parte II In : V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol I , 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro Brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p.497-515 ,1995.

CHEN, W. F. , SALEEB, A.. Constitutive Equations for Engineering Materials. New York, John Wiley e Sons , Vol 1 : Elasticity and Modeliing , p. 1-181 ,1982.

FRUCHTENGARTEN, J., Dimensionamento de Estruturas de Aço, EP USP- FDTE-COSIPA, Núcleo de tecnologia da construção , 339 p. ,1986.

GALAMBOS , Theodore V. , Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, New York , John Wiley & Sons, 4th edition , 786p. ,1976.

GIRHAMMAR, U. A. , GOPU, Viajaya K. A. , Composite beam-columns with interlayer slip - exact analysis. In: Journal of Structural Engineering, Vol 119, nº 4, abril , p. 1265-1282 ., 1993 .

GURFINKEL, German. Wood engineering. New Orleans , Southern Forest Products Association, 537 p.,1973.

HASHIN , Z. Plane anisotropic beams . Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME, p. 257 - 262 , jun 1967 .

HOYLE Jr , ROBERT Steel-Reinforced Wood Beam Design , Forest Products Journal, Vol 25 , nº 4, abril 1975 .

JOHN, C. ; CHILVER, A. H., Strength of materials and structures. London, Edward Arnold, second edition, 404 p.,1961

KULAK,I. G. L.,FISHER , J.W., STRUIK, J. H. A. , Guide to Design Criteria for Bolted and Riveted Joints, New York , John Wiley & Sons , second Edition, 333 p.,1987.

LAIER , J. E. ; BARREIRO , J. C. , Complementos de resistência do materiais , São Carlos, Escola de Engenharia São Carlos /USP, Publicação nº. 073/92 reimpressão , 208 p. , 1983.

LANGENDONCK, T. V. Resistência dos Materiais- Deformações I , Rio de Janeiro, Editora Científica , 252 p.,1960 .

LANGENDONCK, T. V. , Resistência dos Materiais - Tensões ,São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo , 286 p.,1971.

LANGENDONCK, T. V. , Resistência dos Materiais- Deformações II , São Paulo , Editora Edgard Blücher Ltda e Editora da Universidade de São Paulo , 293 p., 1960.

LEKHNITSKII, S. G. , Theory of elasticity of an anisotropic body . Moscu , Mir, p. 10-98, 1981 .

LISBOA , C. R. , Ligação de peças estruturais de madeira por parafusos , São carlos, Dissertação de Mestado - Escola de Engenharia São Carlos /USP , 105 p., 1991 .

LUCHESE , J.A., STAMATO, M. C., Ligações de peças de peroba rosa com parafusos de aço , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP, Publicação nº. 147 , 42 p. , 1967.

MALITE , Maximiliano , Estruturas de aço constituídas por perfis de chapa dobrada : Dimensionamentos de ligações , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP, publicação nº. 022/93 , 49 p. , 1993 .

MALLICK , P. K. Fiber-Reinforced Composites: Material , Manufacturing, and Design , Ed. Marcel Dekker Inc. , New York, 469 p . ,1988 .

MASCIA , N. T ., FURLANI, J. E. , Sobre o coeficiente de Poisson da madeira In V EBRAMEM - ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRAS ,vol II, 1995, Belo Horizonte , Anais: do V Ebramem - Encontro Brasileiro em madeiras e em estruturas de madeiras , UFMG, p. 205-214, 1995 .

MASCIA, N.T. Considerações a respeito da Anisotropia na madeira , São carlos, Tese de Doutorado - Escola de Engenharia São Carlos /USP , 295 p., 1991.

MASCIA, Nilson T. Sobre viga de seção composta tipo caixão com alma de compensado. In: ENCONTRO REGIONAL EM MADEIRAS E ESTRUTURAS DE MADEIRA, 1, 1993, São Paulo, Anais: do I Encontro Regional de madeiras e estruturas de madeira de São Paulo: EPUSP/PEF, 1993. p. 201-233.

MASCIA, Nilson T., AQUINO, P.C. de, OIVEIRA, H.E.S., Estudo comparativo entre vigas com alma de madeira e vigas com alma de Compensado In 11º CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA E CIÊNCIA DOS MATERIAIS, 2, 1994, Águas de São Pedro Anais: do 11o Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, EPUSP, 1994, p. 1337-1339.

MERRITT, S. Frederick, LOUCKS, R. D., "Connections" In : Structural Steel Designers Handbook, New York, 1972, p. 5.81 a 5.85.

NEWMARK, N. M. ; SIESS, C. P. ; VIEST, I. M. , Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction , Proc. Soc. for Experimental Stress Analysis , vol 9 , nº 1 , 1951, p. 75-92 .

PALERMO Jr, Leandro, Princípios da Energia e Introdução ao métodos Variacionais , Apostila sem identificação de publicação .

PARKER, Harry, Diseño Simplificado de Estructuras de Madera, México , Editorial Limusa - Wiley , 311p., 1972 .

PASSOS , M. E. M. , Madeira : Vigas de seção composta T, tendo o parafuso como elemento de solidarização , Belo Horizonte , Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Minas Gerais - Escola de Engenharia , 126 p. , 1992.

PFEIL, Walter. Cimbramentos . Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 431 p.,1987.

PFEIL, Walter. Estruturas de Madeira. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 252p.,1985.

POPOV, E. P., Introdução à mecânica dos sólidos, Tradução: AMORELLI, M. O. C. , São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda, 521 p.,1913 .

RACHID , M ; MORI ; D. D. , Instabilidade : conceitos - aplicação na flambagem por flexão , São Carlos , Escola de Engenharia São Carlos /USP , Publicação n°. 49/89 , 130 p., 1989 .

RICARDO, O. G. de S. , Teoria das Estruturas, São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 669 p.,1922 .

SALMON, C. G., JHONSON , J.E. , Steel Structures Design and Behavior, Scranton , Intext Educational Publishers , 946 p. , 1971 .

STRAUCH, C. E. M. , Resistência ao momento fletor de vigas I simétricas não esbeltas , Salvador ,Centro Editorial e Didático da UFBA , p 125-139 , 1990 .

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER ,J. N. , Teoria da Elasticidade , Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois S.A., 3a. edição, 545p.,1980.

TIMOSHENKO, Stephen P. Resistência dos Materiais tradução D. , F. M. , Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, Vol 2, 3a. edição , 518 p.,1969.

TIMOSHENKO, Stephen P. Resistência dos Materiais tradução J. R. C., Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, Vol 1 , 1a. edição, 451 p.,1971.

UGURAL, A. C., FENSTER, S. K., Advanced Strength and Applied Elasticity, New York,, Elsevier Science Publishing C. O. , Inc, second edition, New Iork , 471 p. 1987 .

WILLIAMS, D. C. ; HARRIS, C. E. , Structural Design in Metals , New York, The Ronald Press Company, Second Edition , 655 p. ,1987 .

YU, Wei-Wen , Cold-Formed Steel Structures - Design Analysis Construction, New York , McGraw-Hill Book Company , 463 p. , 1973 .

ANEXOS

ANEXO 1

1. EQUAÇÃO DE EULER

Para obtermos a equação de Euler , procuraremos tirar partido da analogia entre o cálculo variacional e a procura dos máximos e mínimos de uma função.

Em uma determinada função , como por exemplo :

$$I(y_{(x)}) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_{(x)}, y'_{(x)}, \dots, y^{(n)}_{(x)}) dx \dots\dots\dots (1.1)$$

A função F será considerada diferenciável (n + 2) vezes com respeito a todos os argumentos e o extremo do funcional da expressão (1.1) . Os pontos do contorno sendo fixos, serão :

$$\begin{aligned} y_{(x_0)} = y_0, \quad y'_{(x_0)} = y'_0, \quad \dots\dots\dots, \quad y^{(n-1)}_{(x_0)} = y^{(n-1)}_0 \\ y_{(x_1)} = y_1, \quad y'_{(x_1)} = y'_1, \quad \dots\dots\dots, \quad y^{(n-1)}_{(x_1)} = y^{(n-1)}_1 \quad \dots\dots\dots (1.2) \end{aligned}$$

As condições de contorno vistas em (1.2) , mostram os valores nos pontos de fronteira , não só para a função, mas também , para as derivadas de ordem (n - 1) .

Seja a curva y_{∞} , que alcança um extremo, é possível dizer que é diferenciável $2n$ vezes, e a equação vizinha $y = \bar{y}_{(x)}$, chamada curva de comparação , diferenciável $2n$ vezes, representadas através da fig. A.1 .

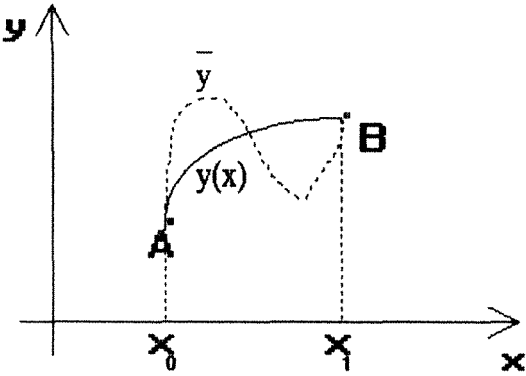


Figura A.1 Curvas das funções y_{∞} e $\bar{y}_{(x)}$

Fonte PALERMO [30]

A família monoparamétrica de curvas pode ser expressa da seguinte forma :

$$y_{(x,\alpha)} = y_{(x)} + \alpha [\bar{y}_{(x)} - y_{(x)}] \dots\dots\dots (1.3)$$

Examinando a expressão (1.3) , verificamos que para $\alpha = 0$, obteremos $y_{(x)}$, e para $\alpha=1$, encontramos $\bar{y}_{(x)}$.

A variação $(\bar{y}_{(x)} - y_{(x)})$ é uma função de x , e podemos escrever como sendo :

$$\delta y = (\bar{y}_{(x)} - y_{(x)}) \dots \dots \dots (1.4)$$

A expressão (1.3), pode agora ser escrita como :

$$y_{(x,\alpha)} = y_{(x)} + \alpha \delta y \dots \dots \dots (1.5)$$

Se o funcional é considerado somente nas curvas da família $y = (x, \alpha)$, este transforma-se numa função do parâmetro α , que determina uma curva, e portanto, um valor para o funcional, ou seja :

$$I[y_{(x,\alpha)}] = \varphi(\alpha) \dots \dots \dots (1.6)$$

A condição para realizar um extremo é alcançada em $\alpha = 0$, obtendo $y_{(x)}$, sendo assim a variação do funcional é zero ($\delta I = 0$). A condição necessária para que $\varphi(\alpha)$ tenha um extremo em $\alpha = 0$, é a anulação de sua derivada, ou seja :

$$\varphi'(0) = 0 \dots \dots \dots (1.7)$$

A variação do funcional, δI , pode ser encontrada através da equação (1.7), ou seja, derivada da expressão em α , para o extremo $\alpha = 0$, ou :

$$\delta I = \left[\frac{d}{d\alpha} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_{(x,\alpha)}, y'_{(x,\alpha)}, \dots, y^{(n)}_{(x,\alpha)}) dx \right]_{\alpha=0} \dots\dots\dots (1.8)$$

Ou a expressão (1.8) ,pode ser apresentada para a variação do funcional como :

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (Fy\delta y + Fy'\delta y' + Fy''\delta y'' + \dots\dots\dots + Fy^{(n)}\delta y^{(n)}) dx \dots\dots\dots (1.9)$$

A integração da função (1.9) , por partes , até n vezes , resulta na fórmula de recorrência :

$$\int_{x_0}^{x_1} Fy^{(n)}\delta y^{(n)} dx = [Fy^{(n)} . \delta y^{(n-1)}]_{x_0}^{x_1} - [\frac{d}{dx} Fy^{(n)} . \delta y^{(n-2)}]_{x_0}^{x_1} + \dots\dots + (-1)^n \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^n}{dx^n} Fy^{(n)} \delta y dx .. (1.10)$$

Sendo n o número de vezes que a função é derivável .

Para a viga mista em chapa dobrada e madeira serrada (transformada), o funcional está caracterizado pela expressão (1.10) , e o maior grau de derivada é 2 (dois) .

Através desta informação , a expressão (1.9) , considerando que a função y , representa a elástica v_{∞} que tem derivada de ordem dois , podemos resolvê - la pela seguinte equação :

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (Fy\delta y + Fy'\delta y' + Fy''\delta y'') dx \dots\dots\dots (1.11)$$

Resolvendo as integrais da variação do funcional em (1.11) , através da fórmula de recorrência (1.10) , encontramos :

$$\int_{x_0}^{x_1} Fy'\delta y' dx = [Fy'\delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} Fy'\delta y dx \dots\dots\dots (1.12)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} Fy''\delta y'' dx = [Fy''\delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} Fy''\delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} Fy''\delta y dx \dots\dots\dots (1.13)$$

Agrupando - se as equações (1.12) e (1.13) em (1.11) , e rearranjando-se adequadamente chegamos a :

$$\delta I = \left[\left(Fy' - \frac{d}{dx} Fy'' \right) \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + [Fy''\delta y']_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(Fy - \frac{d}{dx} Fy' + \frac{d^2}{dx^2} Fy'' \right) \delta y dx \dots\dots (1.14)$$

Entretanto , como os pontos na fronteira (contorno) são fixos , logo são conhecidos, conforme mostra a figura A.1 , ou seja :

$$\delta y \Big|_{x=x_0} \rightarrow \bar{y}_{(x_0)} - y_{(x_0)} = 0 \dots\dots\dots (1.15)$$

$\delta y \Big|_{x=x_1} \rightarrow \bar{y}_{(x_1)} - y_{(x_1)} = 0 \dots\dots\dots (1.16)$

Sabemos que a variação da função deve realizar um extremo , portanto a variação do funcional deve ser igual a zero . Com as informações das expressões (1.15) e (1.16) , aplicadas na função (1.14) , fica :

$\delta I= \int_{x_0}^{x_1} (Fy - \frac{d}{dx} Fy' + \frac{d^2}{dx^2} Fy'') \delta y dx = 0 \dots\dots\dots (1.17)$

Como o incremento δy pode assumir qualquer valor arbitrário, $(Fv - \frac{d}{dx} Fv' + \frac{d^2}{dx^2} Fv'')$ é uma função contínua para curva y_{\varnothing} , e realiza o extremo. Para que esta função seja verdadeira , deve ser nula também na curva y_{\varnothing} . A solução desta equação diferencial é chamada de equação de Euler-Poisson .

Considerando o funcional para a viga temos :

$I = \int_{\ell} F(x, v, v', v'') dx \dots\dots\dots (1.18)$

Portanto a expressão (1.17) fornece a equação diferencial da elástica da viga , e o funcional (1.18) , tem a seguinte forma :

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''} \right) = 0 \dots\dots\dots (1.19)$$

1.1 DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER CONSIDERANDO O DESLOCAMENTO POR CORTANTE

O funcional que incorpora somente o cisalhamento, para uma carga concentrada ,
vale :

$$I = \left(\int_0^{t_1} \frac{G_{xy} A v_1'^2}{2c} + \int_{t_1}^t \frac{G_{xy} A v_2'^2}{2c} \right) dx - P v_{(t_1)} + \lambda_1 [v_{1(t_1)} - v_{2(t_1)}] + \lambda_2 [v_{1'(t_1)} - v_{2'(t_1)}] \dots (1.20)$$

Considerando-se exclusivamente a deformação por cortante, a variação do funcional
na equação (1.11) será descrita como :

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (Fy \delta y + Fy' \delta y') dx \dots\dots\dots (1.21)$$

Através da equação de recorrência (1.10) , resolvemos a expressão (1.21) , ou seja :

$$\delta I = [Fy' \delta y]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (Fy - \frac{d}{dx} Fy') \delta y \dots\dots\dots (1.22)$$

Encontraremos a equação diferencial da elástica de v_1 , através de (1.22), e faremos

$(Fy - \frac{d}{dx} Fy') = 0$, para que haja a minimização do funcional, ou seja:

$$\frac{G_{xy} A v_1''}{c} = 0 \dots\dots\dots (1.23)$$

Como podemos verificar na expressão (1.22), a equação diferencial da viga foi extraída de sua segunda parcela, sendo que as outras condições serão tiradas da parcela que falta analisar, ou seja, nos extremos da viga, ou:

$$Fv_1' \delta v_1 \Big|_0^{\ell_1} = 0 \dots\dots\dots (1.24)$$

Em zero $\delta v_1 = 0$, logo:

$$v_1(0) = 0 \dots\dots\dots (1.25)$$

Em ℓ_1 $\delta v_1(\ell_1) \neq 0$, assim:

$$\frac{G_{xy} A v_1'(\ell_1)}{c} - P - \lambda_1 \dots\dots\dots (1.26)$$

Da mesma maneira para o intervalo compreendido entre ℓ_1 e ℓ , podemos escrever:

$$Fv'_2 \delta v_2 \Big|_{t_1}^t = 0 \dots\dots\dots (1.27)$$

No ponto t_1 $\delta v_2 \neq 0$, assim :

$$\frac{G_{xy} A v'_{2(t_1)}}{c} - \lambda_1 = 0 \dots\dots\dots (1.28)$$

Em t $\delta v_2 = 0$, logo :

$$v_{2(t)} = 0 \dots\dots\dots (1.29)$$

E ainda devido a compatibilidade das rotações, chegamos a :

$$v'_{1(t)} = v'_{2(t)} \dots\dots\dots (1.30)$$

Compatibilizando - se os deslocamentos temos :

$$v_{1(t)} = v_{2(t)} \dots\dots\dots (1.31)$$

Integrando-se a partir da equação (1.24) indicada novamente abaixo, temos a seguinte seqüência de resultados :

$$\frac{G_{xy} A v_1''}{c} = 0$$

$$\frac{G_{xy} A v_1'}{c} + K = 0 \dots\dots\dots (1.32)$$

$$\frac{G_{xy} A v_1}{c} + K x + D = 0 \dots\dots\dots (1.33)$$

Onde K e D são constantes de integração

De maneira análoga , para a equação diferencial da elástica de v_2 encontramos:

$$\frac{G_{xy} A v_2''}{c} = 0 \dots\dots\dots (1.34)$$

$$\frac{G_{xy} A v_2'}{c} + H = 0 \dots\dots\dots (1.35)$$

$$\frac{G_{xy} A v_2}{c} + H x + F = 0 \dots\dots\dots (1.36)$$

Onde H e F são constantes de integração .

Aplicando-se a equação (1.25) em (1.33) , concluímos que:

$$D = 0..... (1.37)$$

De (1.29) em (1.36) :

$$H \ell + F = 0..... (1.38)$$

Da equação (1.31) , com (1.33) e (1.36):

$$K \ell_1 = H \ell_1 + F..... (1.39)$$

Ao relacionar a equação (1.38) em (1.39) , chegamos a seguinte expressão :

$$K = \frac{H(\ell_1 - \ell)}{\ell_1}..... (1.40)$$

Da equação (1.26) e (1.28) temos :

$$\frac{G_{xy}Av'_{1(t_1)}}{c} - \frac{G_{xy}Av'_{2(t_1)}}{c} = P (1.41)$$

Relacionado - se (1.32) e (1.35) com (1.41) , chegamos a :

$$K - H = P..... (1.42)$$

Relacionando (1.40) com (1.42) encontramos :

$$H = - \frac{P\ell_1}{\ell} \dots\dots\dots (1.43)$$

$$K = P - \frac{P\ell_1}{\ell} \dots\dots\dots (1.44)$$

Substituindo-se (1.43) em (1.38) , temos :

$$F = P \ell_1 \dots\dots\dots (1.45)$$

Substituindo-se na expressão (1.33) , as equações (1.37) e (1.44) , o deslocamento por esforço cortante com carga concentrada para v_1 , ou seja :

$$\frac{G_{xy}Av_1}{c} = -\frac{P\ell_1}{\ell}x + Px \dots\dots\dots (1.46)$$

Substituindo-se (1.43) , e (1.45) em (1.36) , determinamos o deslocamento por flexão da viga com carga concentrada para v_2 , ou seja :

$$\frac{G_{xy}Av_2}{c} = -\frac{P\ell_1}{\ell}x + P\ell_1 \dots\dots\dots (1.47)$$

2. DEMONSTRAÇÃO DA EQUAÇÃO DE EULER
CONSIDERANDO O DESLOCAMENTO POR FLEXÃO

O funcional que contém somente as deformações por flexão pode ser escrito como sendo :

$$I = \left(\int_0^{t_1} \frac{E_x I_z v_1'^2}{2} + \int_{t_1}^t \frac{E_x I_z v_2'^2}{2} + \right) dx - P v_{(t_1)} + \lambda_1 [v_{1(t_1)} - v_{2(t_1)}] + \lambda_2 [v_{1'(t_1)} - v_{2'(t_1)}] \dots (2.1)$$

A variação do funcional vale :

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1} (Fy \delta y + Fy' \delta y' + Fy'' \delta y'') dx \dots\dots\dots (2.2)$$

Resolvendo as integrais da variação do funcional em (2.2) , através da fórmula de recorrência (1.10) , encontramos :

$$\int_{x_0}^{x_1} Fy' \delta y' dx = [Fy' \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} Fy' \delta y dx \dots\dots\dots (2.3)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} Fy'' \delta y'' dx = [Fy'' \delta y']_{x_0}^{x_1} - \left[\frac{d}{dx} Fy'' \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^2}{dx^2} Fy'' \delta y dx \dots\dots\dots (2.4)$$

Inserindo as equações (2.3) e (2.4) em (2.2) , e arranjando adequadamente chegamos a seguinte conclusão :

$$\delta I = \left[(Fy' - \frac{d}{dx} Fy'') \delta y \right]_{x_0}^{x_1} + [Fy'' \delta y']_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (Fy - \frac{d}{dx} Fy' + \frac{d^2}{dx^2} Fy'') \delta y dx \dots (2.5)$$

Através da minimização da energia potencial da expressão (2.5) , $\delta I = 0$, então para que a soma seja zero , suas respectivas parcelas deverão ser zero . Assim sendo , analisando os extremos da viga , temos :

Da primeira parcela de (2.5) , encontramos que :

$$\left[(Fv_1' - \frac{d}{dx} Fv_1'') \delta v_1 \right]_0^{\ell_1} = 0 \dots (2.6)$$

Em zero $\delta v_1 = 0$, logo:

$$E_z I_z v_1(0) = 0 \dots (2.7)$$

Em ℓ_1 $\delta v_1 \neq 0$, assim sendo , temos a seguinte expressão :

$$- E_x I_z v'''_{\ell_1} + \lambda_1 - P = 0 \dots (2.8)$$

Da segunda parcela da equação (2.5) em (2.1), ou seja :

$$\left[Fv_1'' \delta v_1' \right]_0^{\ell_1} = 0 \dots\dots\dots (2.9)$$

Para a função descrita em zero $\delta v_1' \neq 0$, assim

$$E_x I_z v_{1(0)}'' = 0 \dots\dots\dots (2.10)$$

Em ℓ_1 , $\delta v_{1(\ell_1)}' \neq 0$, portanto :

$$E_x I_z v_{1(\ell_1)}'' + \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots (2.11)$$

De maneira similar para a elástica de v_2 , as parcelas da variação do funcional devem ser zero , logo avaliando o intervalo entre ℓ_1 e ℓ , para a primeira parcela de (2.5) temos :

$$\left[(Fv_2' - \frac{d}{dx} Fv_2'') \delta v_2 \right]_{\ell_1}^{\ell} = 0 \dots\dots\dots (2.12)$$

Assim , em ℓ_1 $\delta v_2' \neq 0$, então :

$$E_x I_z v_{2(\ell_1)}''' - \lambda_1 = 0 \dots\dots\dots (2.13)$$

Da mesma maneira em ℓ , verifica-se que $\delta v_{2(t)} = 0$, portanto :

$$E_z I_z v_2(t) = 0 \dots\dots\dots (2.14)$$

Da segunda parcela de (2.5) nos fornece mais informações , ou seja :

$$\left[F v_2'' \delta v_2' \right]_{t_1}^t = 0 \dots\dots\dots (2.15)$$

Em ℓ_1 sabemos que $\delta v_2' \neq 0$, portanto :

$$- E_x I_z v_{2(t_1)}'' - \lambda_2 = 0 \dots\dots\dots (2.16)$$

Em ℓ as rotações também são diferentes de zero , logo:

$$E_x I_z v_{2(t)}'' = 0 \dots\dots\dots (2.17)$$

Os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 , não podem ser zero , desta maneira encontramos as equações de continuidade e rotações das elásticas , como sendo da seguinte forma :

$$v_{1(t_1)} = v_{2(t_1)} \dots\dots\dots (2.18)$$

$$v'_{1(t_1)} = v'_{2(t_1)} \dots\dots\dots (2.19)$$

As equações (2.8) e (2.13) definem o equilíbrio das cortantes , ou seja :

$$- E_x I_z v'''_{1(t_1)} - P + E_x I_z v'''_{2(t_1)} = 0 \dots\dots\dots (2.20)$$

As equações (2.11) e (2.16) , correspondem ao equilíbrio de momentos no ponto t_1 ,

logo :

$$- E_x I_z v''_{1(t_1)} + E_x I_z v''_{2(t_1)} = 0 \dots\dots\dots (2.21)$$

Aplicando a ultima parcela da expressão (2.5) em (2.1) , resulta em :

$$E_x I_z v_1^{IV} = 0 \dots\dots\dots (2.22)$$

Analogamente à equação diferencial da flexão de v_1 , determinamos v_2

$$E_x I_z v_2^{IV} = 0 \dots\dots\dots (2.23)$$

Integrando - se a equação (2.22) representada abaixo , temos as seguintes equações :

$$E_x I_z v_1^{IV} = 0$$

$$E_x I_z v_1''' + C = 0 \dots\dots\dots (2.24)$$

$$E_x I_z v_1'' + Cx + D = 0 \dots\dots\dots (2.25)$$

$$E_x I_z v_1' + \frac{Cx^2}{2} + Dx + K = 0 \dots\dots\dots (2.26)$$

$$E_x I_z v_1 + \frac{Cx^3}{6} + \frac{Dx^2}{2} + Kx + F = 0 \dots\dots\dots (2.27)$$

Da mesma maneira , integrando - se a expressão (2.23) mencionada novamente abaixo , chegamos a:

$$E_x I_z v_2^{IV} = 0$$

$$E_x I_z v_2''' + H = 0 \dots\dots\dots (2.28)$$

$$E_x I_z v_2'' + Hx + R = 0 \dots\dots\dots (2.29)$$

$$E_x I_z v_2' + \frac{Hx^2}{2} + Rx + S = 0 \dots\dots\dots (2.30)$$

$$E_x I_z v_2 + \frac{Hx^3}{6} + \frac{Rx^2}{2} + Sx + T = 0 \quad (2.31)$$

Da equação (2.7) em (2.27) , concluímos que :

$$F = 0 \quad (2.32)$$

Da equação (2.10) em (2.25) :

$$D = 0 \quad (2.33)$$

De (2.24) e (2.28) introduzidas em (2.20) :

$$C - H - P = 0 \quad (2.34)$$

Da equação (2.25) e (2.29) em (2.21) , temos :

$$C \ell_1 - H \ell_1 - R = 0 \quad (2.35)$$

De (2.17) em (2.29) , encontramos :

$$H \ell + R = 0 \quad (2.36)$$

De (2.34) e (2.36) , aplicadas em (2.35), chegamos a :

$$C = - \frac{P\ell_1}{\ell} + P \dots\dots\dots (2.37)$$

$$R = P \ell_1 \dots\dots\dots (2.38)$$

$$H = - \frac{P\ell_1}{\ell} \dots\dots\dots (2.39)$$

Da condição (2.19) , aplicando - se (2.26) e (2.30) , temos :

$$K = S + \frac{P\ell_1^2}{2} \dots\dots\dots (2.40)$$

Da condição (2.18) , aplicando - se (2.27) e (2.31), descobrimos outra equação , ou seja :

$$T = - \frac{P\ell_1^3}{3} + K\ell_1 - S\ell_1 \dots\dots\dots (2.41)$$

Relacionando - se (2.41) e (2.40) , encontramos :

$$T = \frac{P\ell_1^3}{6} \dots\dots\dots (2.42)$$

Da equação (2.16) aplicada em (2.31) , encontramos assim a constante de integração que faltava , ou seja :

$$S = - \frac{P\ell_1\ell}{3} - \frac{P\ell_1^3}{6\ell} \dots\dots\dots (2.43)$$

Aplicando - se (2.43) em (2.40) , obtemos :

$$K = - \frac{P\ell_1\ell}{3} - \frac{P\ell_1^3}{6\ell} + \frac{P\ell_1^2}{2} \dots\dots\dots (2.44)$$

Assim encontramos as elásticas de v_1 para a flexão com carga concentrada, substituindo-se em (2.27), os valores encontrados de (2.32), (2.33), (2.37),(2.44), ou seja :

$$v_1 = \frac{1}{E_x I_z} \left(\frac{P\ell_1 x^3}{6\ell} - \frac{Px^3}{6} + \frac{P\ell_1 \ell x}{3} + \frac{P\ell_1^3 x}{6\ell} - \frac{P\ell_1^2 x}{2} \right) \dots\dots\dots (2.45)$$

E a elástica de v_2 para a flexão , substituindo-se em (2.31) , os resultados de (2.38), (2.39), (2.42), e (2.43) , assim sendo , temos :

$$v_2 = \frac{1}{E_x I_z} \left(\frac{P\ell_1 x^3}{6\ell} - \frac{P\ell_1 x^2}{2} + \frac{P\ell_1 \ell x}{3} + \frac{P\ell_1^3 x}{6\ell} - \frac{P\ell_1^3}{6} \right) \dots\dots\dots (2.46)$$

ANEXO 2

DEMONSTRAÇÃO DO CÁLCULO DO FATOR DE FORMA PARA A CHAPA METÁLICA DA VIGA MISTA .

Para este propósito , vamos desmembrar a chapa metálica em figuras geométricas conhecidas, e assim , calcular a contribuição de cada um desses segmentos, que, somados, determinarão o fator de forma da figura total, e estarão representadas pelas figuras A.2, A.3 e A.4, sendo a espessura da chapa “e” .

A fig. A.2 (lábios enrijecedores) compõe a primeira parcela do fator de forma , dada pela seguinte função :

$$c_{s1} = \frac{A_1}{I_1^2} \int_A \frac{S_1^2}{b_1^2} dA_1 \dots\dots\dots (3.1)$$

Onde :

$$A_1 = 4 a e$$

$$I_1 = \frac{4ea^3}{12} + 4ae\left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$S_1 = 2 e y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$b_1 = 2 e$$

$$dA_1 = 2 e dy$$

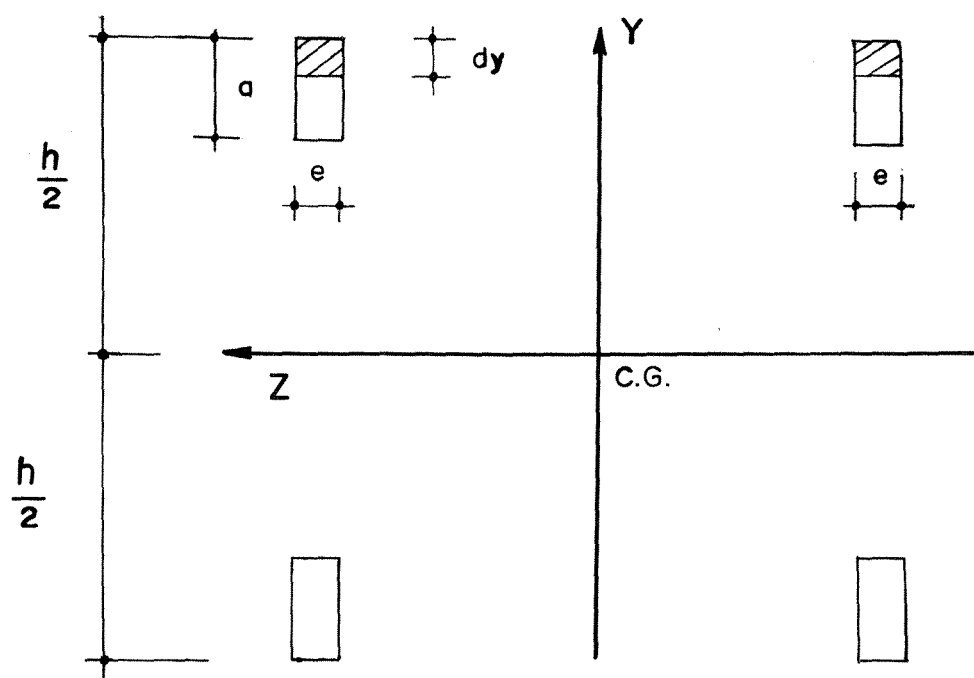


Figura A.2 Aba enrijecedora

Substituindo em (3.1) , temos :

$$c_{sl} = \frac{A_1}{I_1^2} \int_0^a \frac{(2e)^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right)^2}{(2e)^2} 2(2e) dy \dots\dots\dots (3.2)$$

Desenvolvendo (3.2) , temos :

$$c_{sl} = \frac{A_1}{I_1^2} \int_0^a \frac{\left(\frac{(2e)^2 h^2 y^2}{4} - \frac{(2e)^2 h y^3}{2} + \frac{(2e)^2 y^4}{4}\right)^2}{(2e)^2} 2(2e) dy \dots\dots\dots (3.3)$$

Finalmente integrando (3.3), chegamos a:

$$c_{sl} = \frac{A_1}{I_1^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20}\right)_0^a 4e \dots\dots\dots (3.4)$$

Portanto , temos :

$$c_{sl} = \frac{4eA_1}{I_1^2} \left(\frac{a^3 h^2}{12} - \frac{ha^4}{8} + \frac{a^5}{20}\right) \dots\dots\dots (3.5)$$

A segunda parcela do fator de forma ,corresponde à mesa , conforme fig. A.3 .

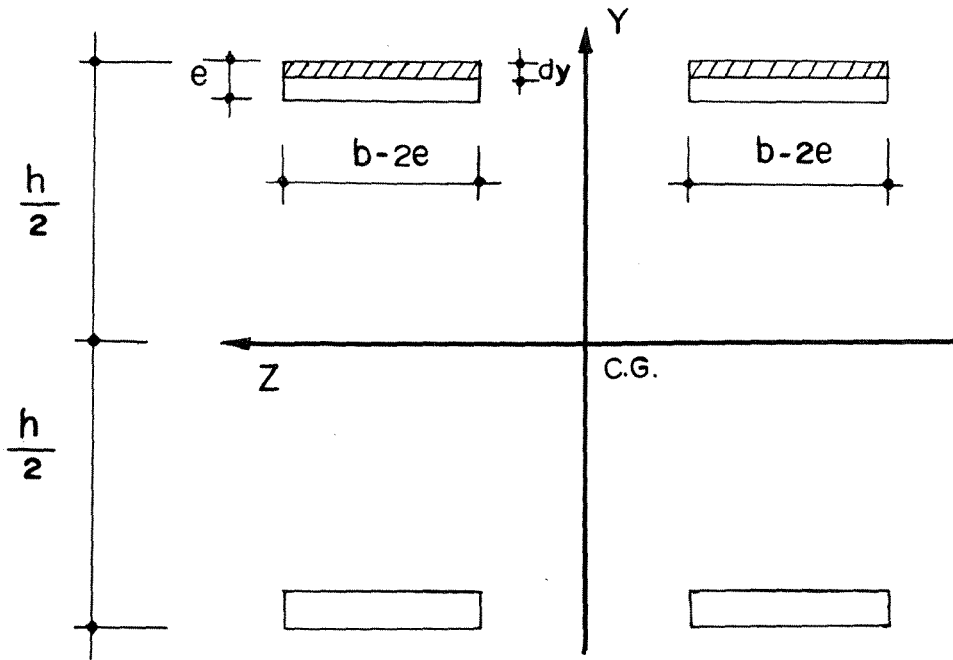


Figura A.3 Mesa da viga metálica

Da fig. A.3 escrevemos que :

$$c_{s2} = \frac{A_2}{I_2^2} \int_A \frac{S_2^2}{b_2^2} dA_2 \dots\dots\dots (3.6)$$

Onde

$$A_2 = (b - 2e) 4 e$$

$$I_2 = \frac{4(b - 2e)e^3}{12} + 4e(b - 2e)\left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2}\right)^2$$

$$S_2 = 2(b - 2e)y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$b_2 = 2(b - 2e)$$

$$dA_2 = 2(b - 2e) dy$$

Substituindo as incógnitas de (3.6), encontramos que :

$$c_{s2} = \frac{A_2}{(I_2)^2} \int_0^e \frac{[2(b - 2e)]^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)^2}{[2(b - 2e)]^2} 2[2(b - 2e)] dy \dots\dots\dots (3.7)$$

Desenvolvendo (3.7), temos :

$$c_{s2} = \frac{A_2}{(I_2)^2} \int_0^e \left(\frac{h^2 y^2}{4} - \frac{hy^3}{2} + \frac{y^4}{4} \right) 4(b - 2e) dy \dots\dots\dots (3.8)$$

Finalmente integrando (3.8), chegamos a:

$$c_{s2} = \frac{A_2}{(I_2)^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20} \right)_0^e 4(b - 2e) \dots\dots\dots (3.9)$$

Portanto, temos :

$$c_{s2} = \frac{4A_2(b - 2e)}{I_2^2} \left(\frac{e^3 h^2}{12} - \frac{he^4}{8} + \frac{e^5}{20} \right) \dots\dots\dots (3.10)$$

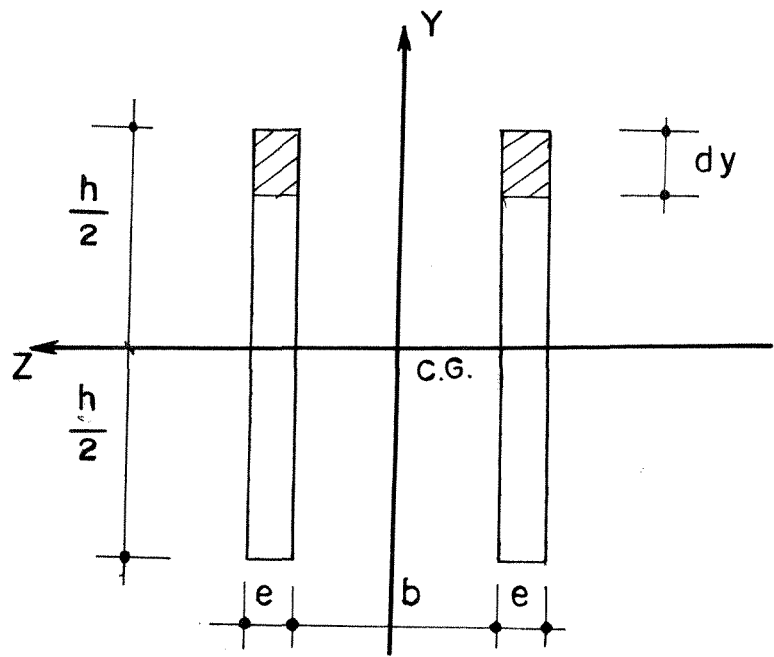


Figura A.4 Alma da viga metálica

A terceira parcela do fator de forma vem da fig. A.4 ,sendo que :

$$c_{s3} = \frac{A_3}{I_3^2} \int_A \frac{S_3^2}{b_3^2} dA_3 (3.11)$$

Onde

$$A_3 = 2 \, h \, e$$

$$I_3 = \frac{2eh^3}{12}$$

$$S_3 = 2 e y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$b_3 = 2 e$$

$$dA_3 = 2 e dy$$

Substituído-se os respectivos valores em (3.11) , encontramos :

$$c_{s3} = \frac{A_3}{(I_3)^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{(2e)^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)^2}{(2e)^2} 2(2e) dy \dots\dots\dots (3.12)$$

Desenvolvendo (3.12) , temos :

$$c_{s3} = \frac{A_3}{(I_3)^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\left(\frac{(2e)^2 h^2 y^2}{4} - \frac{(2e)^2 h y^3}{2} + \frac{(2e)^2 y^4}{4} \right)^2}{(2e)^2} 2(2e) dy \dots\dots\dots (3.13)$$

Finalmente integrando (3.13), chegamos a:

$$c_{s3} = \frac{A_3}{(I_3)^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20} \right)_0^{\frac{h}{2}} 4e \dots\dots\dots (3.14)$$

Portanto , temos :

$$c_{s3} = \frac{4 e h^5 A_3}{240 I_3^2} \dots\dots\dots (3.15)$$

Concluímos que somando - se as equações ,(3.5),(3.10) e (3.15), temos o fator de forma da chapa dobrada , ou seja :

$$c_s = \frac{4eA_1}{I_1^2} \left(\frac{a^3 h^2}{12} - \frac{ha^4}{8} + \frac{a^5}{20} \right) + \frac{4eA_2(b-2e)}{I_2^2} \left(\frac{e^3 h^2}{12} - \frac{he^4}{8} + \frac{e^5}{20} \right) + \frac{4eh^5 A_3}{240I_3^2} \dots (3.16)$$

ANEXO 3

DEMONSTRAÇÃO DO CÁLCULO DO FATOR DE FORMA PARA UM RETÂNGULO EM MADEIRA DA VIGA MISTA.

Para um elemento de área composto por $(y \ b)$, o conforme fig. A.5 , o momento estático é dado por :

$$S_w = b y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right) \dots\dots\dots (4.1)$$

Sendo que o fator de forma é dado por :

$$c_w = \frac{A_w}{I_w^2} \int_A \frac{S_w^2}{b_w^2} dA_w \dots\dots\dots (4.2)$$

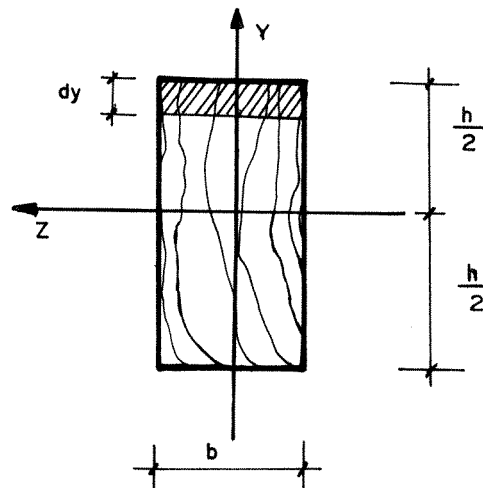


Figura A.5 Elemento de área do retângulo de madeira

Onde :

$$A_w = b_w \cdot h$$

$$dA = b_w dy$$

$$I_w = \frac{b_w h^3}{12}$$

O índice w representa a madeira

Substituindo-se os valores na integral , chegamos a seguinte equação para o fator de forma na madeira de seção retangular :

$$c_w = \frac{A_w}{I_w^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{b_w^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)^2}{b_w^2} 2b_w dy \dots\dots\dots (4.3)$$

Desenvolvendo (4.3) , temos :

$$c_w = \frac{A_w}{I_w^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\left(\frac{b_w^2 h^2 y^2}{4} - \frac{b_w^2 h y^3}{2} + \frac{b_w^2 y^4}{4} \right)^2}{b_w^2} 2b_w dy \dots\dots\dots (4.4)$$

Finalmente integrando (4.4), chegamos a:

$$c_w = \frac{A_w}{I_w^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20} \right)_0^h 2b_w \dots\dots\dots (4.5)$$

$$c_w = \frac{A_w 2bh^5}{240I_w^2} \dots\dots\dots (4.6)$$

Substituindo o valor do momento de inércia para seções retangulares como sendo de

$I_z = \frac{bh^3}{12}$, e a área igual a $A = bh$, encontramos esse fator como sendo :

$$c_w = 1,2$$

Que era o valor esperado para esse tipo de seção .

ANEXO 4

DEMONSTRAÇÃO DO CÁLCULO DO FATOR DE FORMA PARA A VIGA DE SEÇÃO MISTA (TRANSFORMADA).

Para esse fim , desmembramos a viga em figuras geométricas conhecidas, e , calculamos a contribuição de cada um desses segmentos, que, somados, determinam o fator de forma da figura total, e estão representadas pelas figuras A.6 , A.7, e A.8 .

A fig. A.6 (abas enrijecedoras) compõe a primeira parcela do fator de forma , dada pela seguinte função :

$$c_1 = \frac{A_1}{I_1^2} \int_A \frac{S_1^2}{b_1^2} dA_1 \dots\dots\dots (5.1)$$

Onde :

$$A_1 = 4 a e$$

$$I_1 = \frac{4ea^3}{12} + 4ae \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right)^2$$

$$S_1 = 2 e y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$b_1 = 2 e$$

$$dA_1 = 2 e \, dy$$

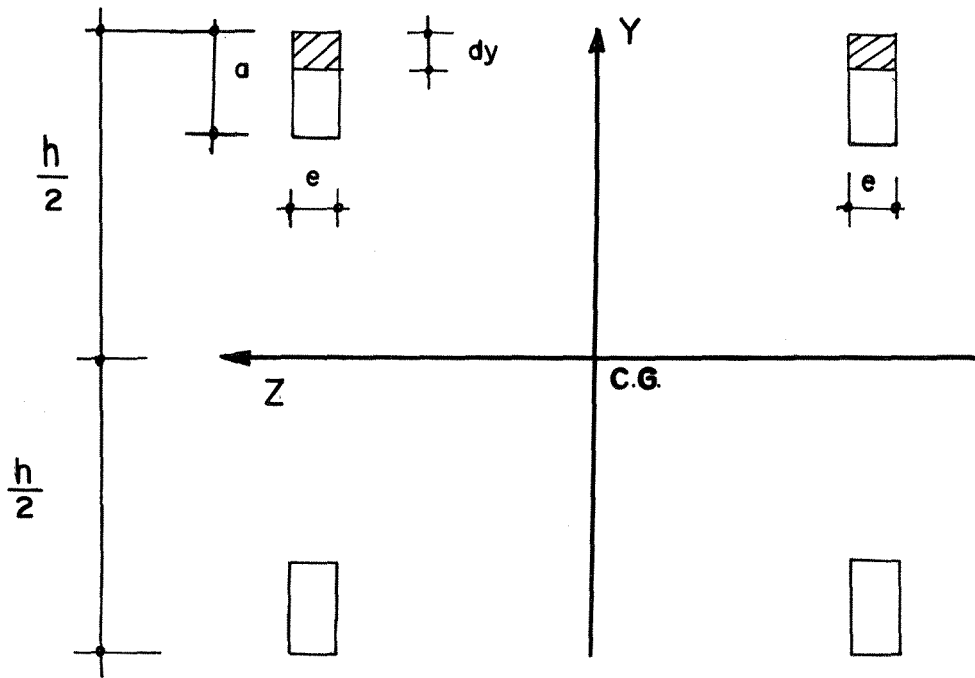


Figura A.6 Aba enrijecedora da viga mista(transformada)

Substituindo em (5.1) , as referidas incógnitas temos :

$$c_1 = \frac{A_1}{I_1^2} \int_0^a \frac{(2e)^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)^2}{(2e)^2} 2(2e) dy \dots\dots\dots (5.2)$$

Desenvolvendo (5.2) , temos :

$$c_1 = \frac{A_1}{I_1^2} \int_0^a \frac{\left(\frac{(2e)^2 h^2 y^2}{4} - \frac{(2e)^2 h y^3}{2} + \frac{(2e)^2 y^4}{4} \right)^2}{(2e)^2} 2(2e) dy \dots\dots\dots (5.3)$$

Finalmente integrando (5.3), chegamos a:

$$c_1 = \frac{A_1}{I_1^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20} \right)_0^a 4e \dots\dots\dots (5.4)$$

Portanto , temos :

$$c_1 = \frac{4eA_1}{I_1^2} \left(\frac{a^3 h^2}{12} - \frac{ha^4}{8} + \frac{a^5}{20} \right) \dots\dots\dots (5.5)$$

A segunda parcela do fator de forma ,corresponde à mesa , conforme fig. A.7 .

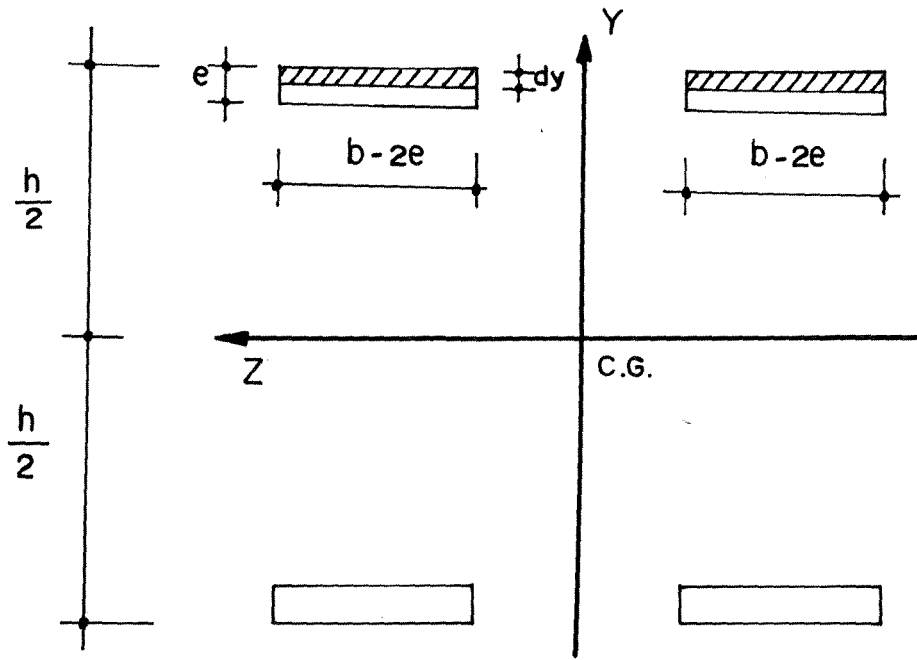


Figura A.7 Mesa da viga metálica

Da fig. A.7 escrevemos que :

$$c_2 = \frac{A_2}{I_2} \int_A \frac{S_2^2}{b_2^2} dA_2 \dots\dots\dots (5.6)$$

Onde :

$$A_2 = (b - 2e) 4 e$$

$$I_2 = \frac{4(b-2e)e^3}{12} + 4e(b-2e)\left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2}\right)^2$$

$$S_2 = 2(b-2e)y\left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right)$$

$$b_2 = 2(b-2e)$$

$$dA_2 = 2(b-2e)dy$$

Substituindo os valores em (5.6) , encontramos que :

$$c_2 = \frac{A_2}{(I_2)^2} \int_0^e \frac{[2(b-2e)]^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2}\right)^2}{[2(b-2e)]^2} 2[2(b-2e)]dy \dots\dots\dots (5.7)$$

Desenvolvendo (5.7) , temos :

$$c_2 = \frac{A_2}{(I_2)^2} \int_0^e \left(\frac{h^2 y^2}{4} - \frac{hy^3}{2} + \frac{y^4}{4}\right) 4(b-2e)dy \dots\dots\dots (5.8)$$

Finalmente integrando (5.8), chegamos a:

$$c_2 = \frac{A_2}{(I_2)^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20}\right)_0^e 4(b-2e) \dots\dots\dots (5.9)$$

Portanto , temos :

$$c_2 = \frac{4A_2(b-2e)}{I_2^2} \left(\frac{e^3 h^2}{12} - \frac{he^4}{8} + \frac{e^5}{20} \right) \dots\dots\dots (5.10)$$

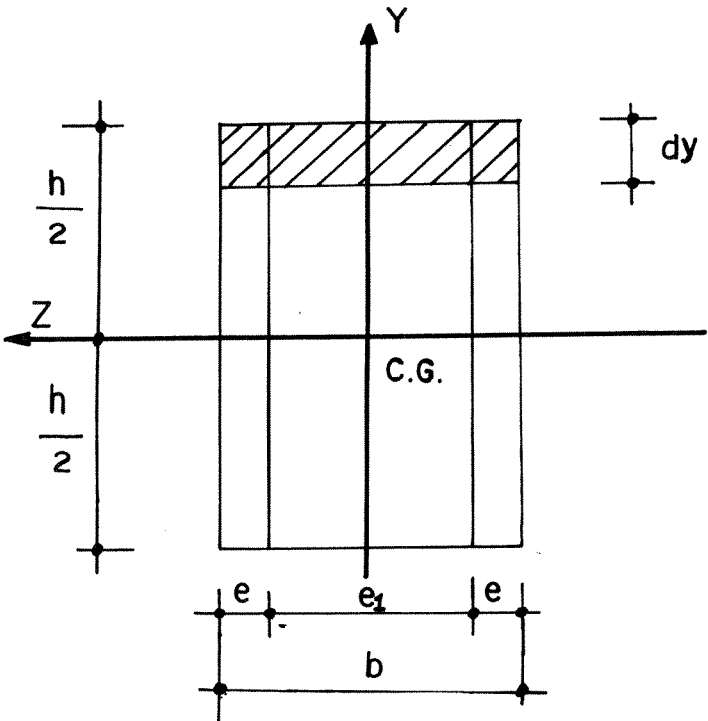


Figura A.8 Alma da viga metálica (seção transformada)

A terceira parcela vem da fig. A.8 , havendo assim, um incremento de área na alma proveniente da madeira transformada . O fator de forma será calculado por :

$$c_3 = \frac{A_3}{I_3^2} \int_A \frac{S_3^2}{b_3^2} dA_3 \dots\dots\dots (5.11)$$

Onde :

$$A_3 = 2 h e + h e_1$$

$$I_3 = \frac{2eh^3}{12} + \frac{e_1h^3}{12}$$

$$S_3 = b y \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)$$

$$b_3 = 2e + e_1$$

$$dA_3 = b dy$$

Substituído-se os respectivos valores em (5.11) , encontramos :

$$c_3 = \frac{A_3}{(I_3)^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{b_3^2 y^2 \left(\frac{h}{2} - \frac{y}{2} \right)^2}{b_3^2} 2b_3 dy \dots\dots\dots (5.12)$$

Desenvolvendo (5.12) , temos :

$$c_3 = \frac{A_3}{(I_3)^2} \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{\left(\frac{b_3^2 h^2 y^2}{4} - \frac{b_3^2 h y^3}{2} + \frac{b_3^2 y^4}{4} \right)^2}{b_3^2} 2b_3 dy \dots\dots\dots (5.13)$$

Finalmente integrando (5.13), chegamos a:

$$c_{s3} = \frac{A_3}{(I_3)^2} \left(\frac{y^3 h^2}{12} - \frac{y^4 h}{8} + \frac{y^5}{20} \right)_0^{\frac{h}{2}} 2b_3 \dots\dots\dots (5.14)$$

Portanto , temos :

$$c_{s3} = \frac{2(2e + e_1)h^5 A_3}{240I_3^2} \dots\dots\dots (5.15)$$

Concluimos que somando - se as equações , (5.5) , (5.10) e (5.15), temos o fator de forma da viga mista transformada (equivalente) , ou seja :

$$c = \frac{4eA_1}{I_1^2} \left(\frac{a^3 h^2}{12} - \frac{ha^4}{8} + \frac{a^5}{20} \right) + \frac{4eA_2(b-2e)}{I_2^2} \left(\frac{e^3 h^2}{12} - \frac{he^4}{8} + \frac{e^5}{20} \right) + \frac{2(e_1 + 2e)h^5 A_3}{240I_3^2} \dots(5.16)$$